Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Institut für Mathematik
Lehrstuhl Funktionentheorie
Technische Universität Dortmund

12. Übungsblatt zu Analysis III
WS 2013/14

(Tangentialraum, Normalenfeld)

Abgabe bis Donnerstag, 23.01. 2014, 10 Uhr

Aufgabe 1 Für $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ ist zu zeigen ($\times$ = Vektorprodukt, $\cdot$ = Skalarprodukt):

a. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

b. $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

c. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie ein Normalenfeld der durch

$$R^2 + x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

implizit gegebenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ ($0 < r < R$ vorgegeben).

Aufgabe 3 Es sei $f \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}\mathfrak{F}$ und den nach "oben" zeigenden Normalenvektor $\mathfrak{n}_{\mathbf{x}}$ in jedem Punkt $\mathbf{x} = (x, y, f(x, y))^\top$ des expliziten Flächenstücks $\mathfrak{F} = \text{Graph}(f)$.

Aufgabe 4 Es sei $x = \phi(t),\ z = \psi(t)$ $(a < t < b)$ mit $\phi, \psi \in C^1(a, b)$ und $\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 > 0$ die Parameterdarstellung einer Kurve Γ in der Halbebene $\{(x, 0, z) : x > 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Durch Rotation von Γ um die z-Achse entsteht die Rotationsfläche $\mathfrak{F}$ mit Parameterdarstellung

$$\Phi(t, \theta) = \begin{pmatrix} \phi(t) \cos\theta \\ \phi(t) \sin\theta \\ \psi(t) \end{pmatrix} \quad (a < t < b,\ 0 \le \theta \le 2\pi).$$

Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}\mathfrak{F}$ und einen Normalenvektor $\mathfrak{n}_{\mathbf{x}}$ in jedem Punkt $\mathbf{x} = (x, y, f(x, y))^\top$ von $\mathfrak{F}$. Skizzieren Sie $\mathfrak{F}$ für $\phi(t) = R + r\cos t$, $\psi(t) = r \sin t$, $0 < t < \pi$, wobei $0 < r < R$ vorgegeben sind. Stellen Sie dieses $\mathfrak{F}$ als Graph über $\{(x, y) : (R - r)^2 < x^2 + y^2 < (R + r)^2\}$ dar.

Weitere Informationen über
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/Stundenplanwinter.html`