

11. Übungsblatt zu Analysis III

WS 2013/14

(Fouriertransformation, Partielle Differentialgleichungen)

Abgabe bis Donnerstag, 16.01. 2014, 10 Uhr

Aufgabe 1 Beweisen Sie $\frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\pi x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|n|x}$ ($x > 0$), und folgern Sie $\coth \pi x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(x^2 + n^2)}$ ($x \neq 0$), indem Sie die Poissonsche Summenformel auf $f(t) = e^{-2\pi x|t|}$ ($x > 0$ fest) anwenden.

Aufgabe 2 Unter einer Lösung des Problems

- (1) $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ in $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < \pi, 0 < t < \infty\} \subset \mathbb{R}^2$
- (2) $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ für $t > 0$
- (3) $u(x, 0) = f(x)$ für $0 \leq x \leq \pi$

versteht man eine Funktion $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, welche (1),(2) und (3) erfüllt. Dabei ist $f \in C^1[0, \pi]$ mit $f(0) = f(\pi) = 0$ vorgegeben.

a. Bestimmen Sie alle Lösungen von (1) der Form $u(x, t) = \phi(x)\psi(t)$ mit $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$ und $\|\phi\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq \pi} |\phi(x)| = 1$ (Trennung der Veränderlichen). Es gibt davon abzählbar viele, u_1, u_2, \dots

b. Lösen Sie damit das Problem (1), (2), (3) in Form einer Reihe $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k(x, t)$. (Hinweis: Setzen Sie f ungerade nach $[-\pi, 0]$ und dann 2π -periodisch fort.)

Aufgabe 3 Auf $\mathbb{H} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ sei $P(x, y) = \frac{y/\pi}{x^2 + y^2} = \operatorname{Im} \frac{-1/\pi}{x + iy}$, und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt. Zeigen Sie:

- a. Es gilt $P \in C^\infty(\mathbb{H})$, $P(x, y) > 0$, $P_{xx} + P_{yy} = 0$ in \mathbb{H} und $\int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) dx = 1$ ($y > 0$).
- b. Die Faltung $u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x - t, y) f(t) dt$ gehört zu $C^\infty(\mathbb{H})$.
- c. Es gilt $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in \mathbb{H} und $\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Weitere Informationen über

<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/Stundenplanwinter.html>