Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Institut für Mathematik
Lehrstuhl Funktionentheorie
Technische Universität Dortmund

10. Übungsblatt zu Analysis III
WS 2013/14

(Fouriertransformation)

Abgabe bis Donnerstag, 09.01. 2014, 10 Uhr

Aufgabe 1 Es sei $C_0(\mathbb{R}^n)$ der Raum der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{|\mathbf{x}|\to\infty} f(\mathbf{x}) = 0$ (vgl. Vorlesung). Zeigen Sie:

a. Alle $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ sind gleichmäßig stetig.

b. $\|f\|_\infty := \max\{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ ist eine Norm auf $C_0(\mathbb{R}^n)$. (Wieso Maximum?)

c. Mit dieser Norm ist $C_0(\mathbb{R}^n)$ vollständig.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ durch die Operatoren A, A^* und L, definiert durch

$$A(f) = \frac{df}{dx} + xf,\ \ A^*(f) = -\frac{df}{dx} + xf,\ \ L(f) = -\frac{d^2 f}{dx^2} + x^2 f$$

in sich abgebildet wird, und dass folgendes gilt ($\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$):

1. $\langle A(f), g\rangle = \langle f, A^*(g)\rangle$ und $\langle A^*(f), g\rangle = \langle f, A(g)\rangle$,
2. $\langle A(A^*(f)), f\rangle = \|A(f)\|_2^2 = \|A^*(f)\|_2^2$,
3. $A^*A = L - I$ (I ist die Identität),

und folgern Sie $\langle L(f), f\rangle \ge \langle f, f\rangle$.

Aufgabe 3 Zeigen Sie: Sind f und $\hat{f}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, so stimmen beide Funktionen f.ü. mit jeweils einer Funktion $g, \hat{g} \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ überein.

Aufgabe 4 Die durch $f(t) = |t|^{-1}$ für $|t| > 1$ und $f(t) = 0$ für $|t| \le 1$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gehört zu $L^2(\mathbb{R})$, aber nicht zu $L^1(\mathbb{R})$. Berechnen Sie

$$\tilde{f}(x) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(t)e^{-2\pi i x t}\,dt \quad (x \ne 0)$$

soweit, um auf $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$ schließen zu können. Ist damit $\hat{f}(x) = \tilde{f}(x)$ f.ü. gezeigt?

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + |x+n|^2}$ auf $\mathbb{R}$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert. Kann man somit die Poissonsche Summenformel $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ auf stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ anwenden, die $|f(x)| \le \dfrac{A}{1+x^2}$ erfüllen?

Weitere Informationen über
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/Stundenplanwinter.html