Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Institut für Mathematik
Lehrstuhl Funktionentheorie
Technische Universität Dortmund

1. Übungsblatt zu Analysis III
WS 2013/14

Nullmengen

Abgabe bis Donnerstag, 24. 10. 2013, 10 Uhr

Aufgabe 1 Überprüfen Sie, ob folgende Mengen Nullmengen sind (Begründung nicht vergessen!).

1. $\{(1,x)\ :\ -1 \le x \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$
2. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\ :\ ||\mathbf{x}||_\infty \le 1\} \subset \mathbb{R}^n$
3. $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$.

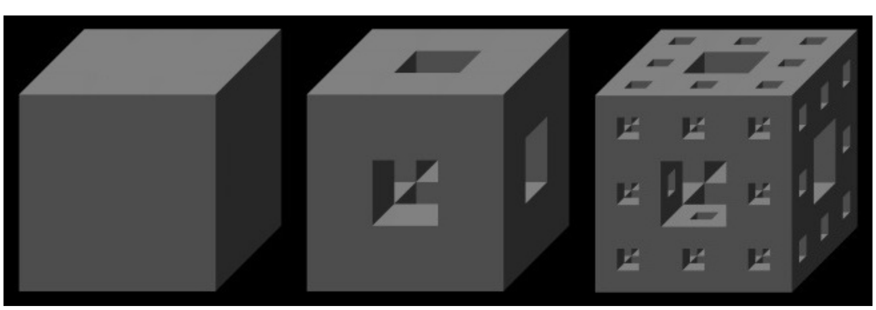
Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass **fast alle** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nur irrationale Koordinaten haben, d.h. daß die Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{wenigstens ein } x_\nu \text{ ist rational}\}$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 3 Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass der Graph $G = \{(x, f(x)) : x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 4 Es sei $E_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\|_\infty \le 1\}$ der Einheitswürfel. Die Menge E_1 entsteht aus E_0, indem E_0 in 27 gleich große Würfel geteilt wird und das Innere von 7 Würfeln in fester Position (z.B. der zentrale und die 6 zentralen äusseren Würfel) entfernt werden. Diese Prozedur wird rekursiv für jeden Teilwürfel von E_1 wiederholt, es entstehen so E_2 und durch Wiederholung die Mengen $E_3, E_4, \ldots$.

1. Berechnen Sie das 3-dimensionale Volumen von E_n.
2. Zeigen Sie, dass $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} E_n$ eine nichtleere und kompakte Nullmenge in $\mathbb{R}^3$ ist.

Gilt dies auch, wenn man die Zahl 7 durch 1 ersetzt und/oder bei jedem Schritt einen Würfel irgendwo (zufällig) entfernt?



Weitere Informationen über
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/Stundenplanwinter.html`