TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. N. Steinmetz
Dipl.-Math. C. Claßen

Dortmund, 3. Dezember 2012

# Analysis I

9. Übungsblatt, Wintersemester 2012/13

**Abgabe** bis Montag, den 10. Dezember 2012, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

### Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit: (Skizzieren Sie $h$.)

a) $h(x) = \left|\left[x + \frac{1}{2}\right] - x\right|,\ x \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = x\left[\frac{1}{x}\right],\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Lassen sich $g$ bzw. die für $x > 0$ definierte Funktion $h(\frac{1}{x})$ in 0 stetig fortsetzen?

### Aufgabe 2 $\star$

Welche der folgenden Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ sind auf $I$ gleichmäßig stetig?

a) $f(x) = \sqrt{1 + x^2},\ I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{x^7 - x}{x^2 - 1},\ I = (-1, 1)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ I = (0, 1]$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ I = [1, \infty)$

### Aufgabe 3

a) Seien $I = [0, 1]$ und $f : I \to I$ stetig gegeben. Zeigen Sie, dass $f$ einen Fixpunkt besitzt, d.h. es existiert ein $x_0 \in I$ mit $f(x_0) = x_0$.

b) Beweisen Sie, dass eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ konstant ist.

### Aufgabe 4 $\star$

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)$ und Funktionenreihen auf punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz in $I$. Bestimmen Sie in *a*) und *b*) die Grenzfunktion.

a) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{x^{2n} + 1},\ I = \mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1 + nx^3},\ I = [q, 1] \quad (0 \le q < 1)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2 + n}, \quad I = \mathbb{R}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^4x^2}, \quad I = [q, \infty),\ (q > 0)$