TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. N. Steinmetz
Dipl.-Math. C. Claßen

Dortmund, 27. November 2012

Analysis I

8. Übungsblatt, Wintersemester 2012/13

Abgabe bis Montag, den 3. Dezember 2012, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass $f : I \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in I$ genau dann stetig ist, wenn $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$ gilt.

Aufgabe 2 $\star$

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ endlich und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a+)$ und $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b-)$ existieren.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \dfrac{1-|x|}{1-x^2}$ auf dem Intervall $(-1, 1)$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 3 $\star$

Welche der folgenden Grenzwerte existieren? Bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{3x+5}\right)\dfrac{1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{|x-1|}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \left[x + (x-[x])^2\right]$

Aufgabe 4

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I$, so sind auch der Betrag $|f|$ und das Maximum $\max\{f, g\}$ stetig in x_0.