

## Analysis I

### 7. Übungsblatt, Wintersemester 2012/13

**Abgabe** bis Montag, den 26. November 2012, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

#### Aufgabe 1 ★

Es sei  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$ . Nutzen Sie im Folgenden das Cauchyprodukt.

a) Zeigen Sie  $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$  und bestimmen Sie damit explizit  $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ .

b) Berechnen Sie  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{n=0}^{\infty} nq^n$  und explizit den Wert der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 q^n$ .

#### Aufgabe 2 ★

Untersuchen Sie folgende Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a)  $a_n = \frac{nq^n}{n^3 + 1}$  ( $q \in \mathbb{R}$ )      b)  $a_n = (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n}$       c)  $a_n = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\sqrt[4]{n}}$

d)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n - (-1)^n}$       e)  $a_n = \binom{2n}{n} q^{-n}$  ( $q \in \mathbb{R}$ )      f)  $a_n = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}}$

#### Aufgabe 3

Welche der folgenden Mehrfachreihen konvergieren ?

a)  $\sum_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} 2^{-2n} 3^{-k+1}$       b)  $\sum_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{(k^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}$

#### Aufgabe 4

Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  konvergent

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  absolut konvergent