TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. N. Steinmetz
Dipl.-Math. C. Claßen

Dortmund, 12. November 2012

Analysis I

6. Übungsblatt, Wintersemester 2012/13

Abgabe bis Montag, den 19. November 2012, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 ⋆

Untersuchen Sie folgende Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $a_n = \dfrac{5n}{n^2+4}$ b) $a_n = \left(\sqrt[n]{4}-1\right)^n$ c) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

d) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)^{-n}$ e) $a_n = \sqrt{n^4+1}-n^2$ f) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $q = \pm 1$ folgende Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

a) $a_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) q^{\frac{n}{2}}$ b) $a_n = \dbinom{2n}{n} q^n$ c) $a_n = \dfrac{5n^7+3n^2}{2n^8-3} q^n$

Aufgabe 3 ⋆

a) Es sei (a_n) eine Nullfolge und $p \in \mathbb{N}$ fest. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p})$ zum Reihenwert $a_0 + \cdots + a_{p-1}$ konvergiert und berechne Sie damit:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{4})(n+\frac{7}{4})}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2-\frac{1}{2}n-\frac{3}{16}}$

b) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{4n^4+n^2+1}-2n^2\right)$ divergent ist.

Aufgabe 4

Beweisen Sie: Ist (a_n) eine monoton wachsende und beschränkte Folge positiver Zahlen, so konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$.

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und den Übungen
sowie das Problem der Woche finden Sie unter:
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/`