TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. N. Steinmetz
Dipl.-Math. C. Claßen

Dortmund, 5. November 2012

Analysis I

5. Übungsblatt, Wintersemester 2012/13

Abgabe bis Montag, den 12. November 2012, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 ⋆

Seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

gilt, sowie Gleichheit falls einer der beiden Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$ existiert.

Aufgabe 2

In welchen der folgenden Fälle ist (a_n) eine Nullfolge? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

a) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| + |a_{n+1}| \le \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$

b) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n + a_{n+1}| \le \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$

c) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \le 2\varepsilon^4$ für alle $n \ge 3n_0$

Aufgabe 3 ⋆

Es sei $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$. Zeigen Sie

a) $\dfrac{1}{2} \le a_n \le 1$ für $n \ge 0$.

b) $|a_{n+1} - a_n| \le \dfrac{4}{9}|a_n - a_{n-1}|$ für $n \ge 1$.

c) (a_n) ist eine Cauchyfolge und berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 4

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Konvergieren die Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n-1}), so ist (a_n) eine konvergente Folge.

b) Konvergieren die Teilfolgen $(a_{2n}), (a_{2n-1})$ und (a_{7n}), so ist (a_n) eine konvergente Folge.

c) Konvergieren die Teilfolgen (a_{2n}) gegen a und (a_{2n-1}) gegen b mit $a \ne b$, so besitzt (a_n) keinen weiteren Häufungswert.

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und den Übungen
sowie das Problem der Woche finden Sie unter:
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/`