TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. N. Steinmetz
Dipl.-Math. C. Claßen

Dortmund, 29. Oktober 2012

Analysis I

4. Übungsblatt, Wintersemester 2012/13

Abgabe bis Montag, den 5. November 2012, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Folge (a_n) für:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^4+1} + 2n^2 - 3^n}{\sqrt[n]{n^2} - n^3 + 3^{n+1}}$

b) $a_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ für $x = 2, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$

c) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \quad (a \geq b \geq c > 0)$

d) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+3})$

e) $a_n = \dfrac{n^n}{3^n n!}$ (Monotoniesatz!)

f) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Aufgabe 2 $\star$

Es seien $a_1 := \frac{3}{2}$ und (a_n) rekursiv definiert durch $a_{n+1} := {a_n}^2 - 2a_n + 2$.

a) Zeigen Sie $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Beweisen Sie, dass (a_n) monoton fallend ist.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).

Aufgabe 3

Seien die Folgen (a_n) und (b_n) mit $0 < a_0 < b_0$ gegeben durch

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Zeigen Sie, dass die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung mit gemeinsamen Grenzwert $M(a_0, b_0) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ bilden.

Aufgabe 4

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Seien (a_n) eine konvergente Folge und (b_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann ist die Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergent.

b) Seien (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann ist die Folge $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge.

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und den Übungen
sowie das Problem der Woche finden Sie unter:
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/`