

Analysis I

2. Übungsblatt, Wintersemester 2012/13

Abgabe bis Montag, den 22. Oktober 2012, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 ★

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer, B nach oben und A nach unten beschränkt. Zeigen Sie, dass die Menge $A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$ nach unten beschränkt ist und dass gilt:

$$\inf(A - B) = \inf A - \sup B$$

Aufgabe 2 ★

Zeigen Sie für $0 < x < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ mit Induktion die Ungleichung:

$$(1 - x)^n \leq \frac{1}{1 + nx}$$

Aufgabe 3

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie jeweils durch einen Widerspruchsbeweis:

- a) Ist n^3 gerade, so auch n .
- b) $\sqrt[3]{2}$ ist nicht rational.

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:

- 1) Gilt $a < b + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, so folgt $a \leq b$.
(Bleibt die Aussage richtig, wenn man $a \leq b$ durch $a < b$ ersetzt?)
- 2) Gilt $|a - b| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, so folgt $a = b$.

b) Beweisen Sie: Ist A eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} und gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so daß $a < M + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $a \in A$ gilt, so ist A nach oben beschränkt und es gilt $\sup A \leq M$.