

Analysis I

14. Übungsblatt, Wintersemester 2012/13

Abgabe bis Montag, den 28. Januar 2013, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 ★

Bestimmen Sie von der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$

- die Taylorpolynome $T_n(x; x_0)$ vom Grad $n = 1, 2, 3$ entwickelt um $x_0 = -1$ bzw. $x_0 = 9$.
- jeweils die Taylorreihen, entwickelt um $x_0 = -1$ bzw. $x_0 = 9$, sowie deren Konvergenzradien.
- Interpretieren Sie Ihre in a) und b) gewonnenen Ergebnisse.

Aufgabe 2

Zeigen Sie,

- dass $\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$ gilt. (Ohne $\sqrt{66}$ auf 2 Dezimalstellen zu berechnen!)
- dass es keine differenzierbaren Funktionen f und g gibt mit $x = f(x)g(x)$ und $f(0) = g(0) = 0$.
- dass $f(x) = x^x$ auf $(0, \infty)$ konvex ist.

Aufgabe 3 ★

Sei f auf \mathbb{R} differenzierbar. Zeigen Sie:

- Zwischen zwei Nullstellen von f liegt eine Nullstelle von f' .
- Ist $f \in C^n(\mathbb{R})$ und hat $f^{(n)}$ höchstens k Nullstellen, so hat f höchstens $k + n$ Nullstellen.
- Die Gleichung $2^x = 1 + x^2$ hat genau 3 Lösungen.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion und überprüfen Sie ihr Ergebnis.

$$\text{a) } \int \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx \qquad \text{b) } \int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx.$$