

Analysis I

13. Übungsblatt, Wintersemester 2012/13

Abgabe bis Montag, den 21. Januar 2013, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 ★

- Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ um $x_0 = 8$.
- Finden Sie für $\sin 1$ eine Näherung ζ mit $|\zeta - \sin 1| < \frac{1}{100}$.
- Zeigen Sie $|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}| < \frac{1}{128}$ für $0 < x < \frac{1}{2}$.
- Bestimmen Sie $T_2(x; 0)$ von $f(x) = \log(3 + \cos(x))$ und zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - T_2(x; 0)| \leq \frac{5}{24}|x|^3$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$.

- Bestimmen Sie für jedes f_n alle lokalen Extremstellen in \mathbb{R} und zeigen Sie, dass es sich um globale Extremstellen handelt.
- Bestimmen Sie die Grenzfunktion von (f_n) und zeigen Sie unter Zuhilfenahme des Ergebnisses in a), dass die Konvergenz gleichmäßig ist.
- Bestimmen Sie die Grenzfunktion von (f'_n) . Ist diese Konvergenz gleichmäßig? Bewerten Sie die Ergebnisse aus b) und c).

Aufgabe 3

Bestimmen Sie einen Näherungswert ζ für $\sqrt{8}$ mit $|\zeta - \sqrt{8}| < \frac{1}{100}$.

Aufgabe 4 ★

Beweisen Sie mit dem Mittelwertsatz folgende Aussagen:

- $\log(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$ für $x > -1$
- $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$ für $x \geq 0$.