TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. N. Steinmetz
Dipl.-Math. C. Claßen

Dortmund, 17. Dezember 2012

Analysis I

11. Übungsblatt, Wintersemester 2012/13

Abgabe bis Montag, den 7. Januar 2013, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$ *(6 Punkte)*

Zeigen Sie, dass durch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^3+n^3}$ eine stetige Funktion f auf $[0,\infty)$ definiert wird und begründen Sie, warum $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ gilt.

Aufgabe 2 $\star$ *(6 Punkte)*

Zeigen Sie, dass $f(x) = 1 - 3x + x^3$ je eine Nullstelle $\xi_1 \in (-2,-1)$, $\xi_2 \in (0,1)$ und $\xi_3 \in (1,2)$ besitzt und berechnen Sie ξ_2 bis auf einen absoluten Fehler $< 1/10$.

Aufgabe 3 *(6 Punkte)*

Gegeben Sei die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n}{n2^n} x^n$.

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe.

b) Untersuchen Sie die Potenzreihe im Punkt r auf Konvergenz.

c) Untersuchen Sie die Potenzreihe im Punkt $-r$ auf Konvergenz.

Aufgabe 4 *(6 Punkte)*

Bestimmen Sie ein Polynom P so, dass $|x\cos x - P(x)| < 1.5 \cdot 10^{-3}$ in $[-1,1]$ gilt.
(Hinweis: T_4 für cos)

Aufgabe 5 *(6 Punkte)*

Es sei $a_0 = 0$ und $a_n = a_{n-1}^2 - 1/5$. Zeigen Sie

a) $-1/5 \le a_n \le 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, (1 Pkt)

b) $|a_{n+1} - a_n| < \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, (2 Pkte)

c) $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, (2 Pkte) und

d) berechnen Sie a. (1 Pkt)

Aufgabe 6 *(6 Punkte)*

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = |x| \arctan(1/x)$ für $x \neq 0$, und $f(0) = 0$, stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung ist.

Aufgabe 7 *(6 Punkte)*

Es sei $f \in C^2[-1,1]$ mit $f(\pm 1) = 0$ und $f'(\pm 1) = 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in (-1,1)$ mit $|f''(\xi)| \geq 1$ gibt.

Aufgabe 8 *(6 Punkte)*

Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos x)}{1 - x/4 - \sqrt{1-x/2}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\log\sin x - \log x}{x^2}$

Aufgabe 9 *(6 Punkte)*

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^3+n^2+n+1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^n}{4^n - n^3}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$

Aufgabe 10 *(6 Punkte)*

Es sei $f(x) = 2x + \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$. Bestimmen Sie

a) $J = f(\mathbb{R})$,

b) zeigen Sie, dass f auf J eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt, und

c) bestimmen Sie davon das Taylorpolynom $T_2(x;0)$.

Die Aufgaben entstammen der Modulprüfung Analysis I (WS 2007/08).

Wir wünschen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins Jahr

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{10n-3}{n+5-(-1)^n} \cdot \frac{400n^2+n-7}{1+2n^2+23n} + \left(1 + \frac{4\log\sqrt[4]{13}}{n}\right)^n \right)$$