TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. N. Steinmetz
Dipl.-Math. C. Claßen

Dortmund, 27. Mai 2013

Analysis II

8. Übungsblatt, Sommersemester 2013

Abgabe bis Montag, den 3. Juni 2013, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$

Es sei $a \in \mathbb{R}^n$ und A eine $(n \times n)$-Matrix. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \to 0$:

a) $\sin |x|^2 = o(|x|)$

b) $e^{a \cdot x} - 1 = O(|x|)$

c) $x^T A x = O(|x|^2)$

d) $Ax + o(|x|) = O(|x|)$

e) Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\varphi(x) = O(|x|^2)$, so ist $\varphi(x) = o(|x|)$.

Aufgabe 2

Es sei D ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ seien differenzierbar. Zeigen Sie:

a) Das Skalarprodukt $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit $(f \cdot g)' = f^T g' + g^T f'$.

b) Ist $f(x) \neq 0$ für $x \in D$, so ist die Funktion $\varphi(x) := |f(x)|$ differenzierbar in D. (Bestimmen Sie die Ableitung von φ.)

Aufgabe 3

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen in $(0, 0)$ unstetig sind.

Aufgabe 4 $\star$

Prüfen Sie, ob folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung:

a) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 e^y + \sin x \\ xy^2 z^3 e^{xy^2 z^3} \end{pmatrix}$

b) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \log\left(1 + \dfrac{xz}{1+y^2}\right) \\ (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{4}} \end{pmatrix}$

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und den Übungen
sowie das Problem der Woche finden Sie unter:
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/`