TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. N. Steinmetz
Dipl.-Math. C. Claßen

Dortmund, 14. Mai 2013

Analysis II

6. Übungsblatt, Sommersemester 2013

Abgabe bis Dienstag, den 21. Mai 2013, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 ⋆

Wie ist $f(x,0)$ für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $f(0,y)$ für $y \in \mathbb{R}$ zu definieren, damit

$$f(x,y) = \frac{\cos xy - 1}{x^3y^2} \sin x, \quad xy \neq 0$$

sich zu einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fortsetzen lässt?

Aufgabe 2

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein zur x-Achse symmetrisches Gebiet (d.h. $(x,y) \in D \Leftrightarrow (x,-y) \in D$). Zeigen Sie, dass es zu $(a,b) \in D$ mit $b > 0$ einen zur x-Achse symmetrischen Weg γ gibt, der (a,b) mit $(a,-b)$ verbindet.

Aufgabe 3 ⋆

Welche der folgenden Mengen sind offen, welche abgeschlossen, welche kompakt? Begründen Sie Ihr Ergebnis!

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2-yz} \geq 1, \cos(x+y) \leq 0\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}^n : |x|_1 \neq 2, |x|_\infty \neq 1\}$

c) $\left\{\left(x + \sin z, \sqrt{\cosh(x+y)}\right) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 0, 1 \leq z \leq 2\right\}$

Aufgabe 4

a) Sei $\mathcal{F} := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ eine Familie reellwertiger Funktionen. Jedes $f \in \mathcal{F}$ sei auf $[a,b]$ differenzierbar, und die Ableitungen f' seien gleichmäßig beschränkt, d.h. $|f'(x)| \leq M$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist.

b) Es seien $\mathcal{F} := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{G} := \{g : [c,d] \to \mathbb{R}\}$ zwei beschränkte und gleichgradig stetige Familien von Funktionen. Zeigen Sie, dass die Familie der Funktionen $H := \{f \cdot g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$ ebenfalls beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und den Übungen
sowie das Problem der Woche finden Sie unter:
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/`