TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. N. Steinmetz
Dipl.-Math. C. Claßen

Dortmund, 6. Mai 2013

Analysis II

5. Übungsblatt, Sommersemester 2013

Abgabe bis Montag, den 13. Mai 2013, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$

Untersuchen Sie, ob für die nachfolgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) \qquad \lim_{y\to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existieren. Welche dieser Funktionen kann man in $(0,0)$ stetig ergänzen?

$$\text{a)} f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+(x-y)^2} \qquad \text{b)} f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \text{c)} f(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

Aufgabe 2

Für ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Graph G von f, ist durch

$$G := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \in I\}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass $G \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist, falls f stetig ist.

b) Ist f stetig und I beschränkt, so ist G kompakt.

c) Finden Sie eine Funktion f und ein Intervall I, so dass G nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 3 $\star$

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$i)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(e^y-1)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad ii)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{y} & ,y \neq 0 \\ 0 & ,y = 0 \end{cases}$$

b) Für welche $\alpha > 0$ läßt sich $g(x) = \dfrac{x_1 x_2 \cdots x_n}{|x|^\alpha}$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0)$ in 0 stetig fortsetzen?

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und den Übungen
sowie das Problem der Woche finden Sie unter:
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/`