TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. N. Steinmetz
Dipl.-Math. C. Claßen

Dortmund, 29. April 2013

Analysis II

4. Übungsblatt, Sommersemester 2013

Abgabe bis Montag, den 6. Mai 2013, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$

Es seien A, B nichtleere, kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) Es existieren $a \in A$ und $b \in B$ mit $|a - b| = \operatorname{dist}(A, B)$.

b) Es existieren $x, y \in A$ mit $|x - y| = \operatorname{diam} A$.

Bleibt die Aussage in a) richtig, wenn eine der beiden Mengen nur abgeschlossen ist bzw. wenn beide Mengen nur abgeschlossen sind?

Aufgabe 2

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $|f'(x)| \leq k < 1, |g'(x)| \leq k$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ das Gleichungssytem

$$\begin{aligned} x + f(y) &= a \\ y + g(x) &= b \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt.
(Hinweis: Banachscher Fixpunktsatz)

Aufgabe 3 $\star$

Für $f \in C[0,1]$ sei die Abbildung T erklärt durch

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x - t) f(t) dt$$

a) Zeigen Sie, dass $T : C[0,1] \to C[0,1]$ gilt, d.h. für $f \in C[0,1]$ gilt $T(f) = g \in C[0,1]$.

b) Sei $K = \{f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in $C[0,1]$. Zeigen Sie, dass $T(K) \subset K$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass T eine Kontraktion auf $C[0,1]$ ist mit Kontraktionskonstante $\frac{1}{2}$.

Was heißt das für die Lösung der Gleichung $Tf = f$?

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und den Übungen
sowie das Problem der Woche finden Sie unter:
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/`