TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. N. Steinmetz
Dipl.-Math. C. Claßen

Dortmund, 15. April 2013

Analysis II

2. Übungsblatt, Sommersemester 2013

Abgabe bis Montag, den 22. April 2013, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 ⋆

Auf dem Intervall $I = [0, 2]$ seien (f_n) und (g_n) durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases} \text{ und } g_n(x) = \frac{x}{n}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n \in \mathcal{R}[0, 2]$ und $g_n \in \mathcal{R}[0, 2]$ und fertigen Sie je eine Skizze an.

b) Bestimmen Sie die Grenzfunktionen $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ und $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$. Untersuchen Sie die Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^2 f_n(x)dx$ und $\displaystyle\int_0^2 g_n(x)dx$. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2 ⋆

Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sei $||x|| = 2|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|$.

a) Zeigen Sie, dass $||.||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Berechnen und skizzieren Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R} : ||x|| < 1\}$.

c) Es sei $|.|$ die Euklidnorm. Bestimmen Sie $a, b > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$a|x| \leq ||x|| \leq b|x|$$

Aufgabe 3

Es seien $a_n, b_n \geq 0$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} {b_n}^2$ konvergent. Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.
Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen.

Aufgabe 4

Es sei $f \in C[a,b]$.

a) Zeigen Sie, dass $\langle f, g\rangle := \int_a^b f(t)g(t)\ dt$ ein Skalarprodukt auf $C[a,b]$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $||f||_2 := \sqrt{\int_a^b f(t)^2\ dt}$ eine Norm auf $C[a,b]$ definiert.

c) Zeigen Sie, dass $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ und $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$ zwei Normen auf $C[0,1]$ sind.

d) Ist $\|f\|_1$ auf $\mathcal{R}[0,1]$ eine Norm?