

## Analysis II

### 14. Übungsblatt, Sommersemester 2013

**Abgabe** bis Montag, den 15. Juli 2013, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

#### Aufgabe 1 ★

Bestimmen Sie die bei der sukzessiven Approximation auftretenden Picard-Iterierten  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  für das Anfangswertproblem

$$x' = 1 + 2tx - x^2, \quad x(0) = 0,$$

sowie die Taylorpolynome  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  der Lösung um den Punkt  $t = 0$ .

#### Aufgabe 2 ★

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen  $A$  jeweils eine Fundamentalmatrix  $X$  des zugehörigen Differentialgleichungssystems  $x' = Ax$  mit  $X(0) = E$ , wobei  $E$  die  $3 \times 3$  Einheitsmatrix bezeichnet:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -6 & 5 \\ 4 & -8 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

#### Aufgabe 3

Es sei  $u : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeigen Sie in Analogie zum Lemma von Gronwall

$$\text{a) } u(t) \leq e^{-t} + 2 \int_0^t e^{s-t} u(s) ds \quad \Rightarrow \quad u(t) \leq e^t$$

$$\text{b) } u(t) \leq t^2 + \int_0^t 4su(s) ds \quad \Rightarrow \quad u(t) \leq \frac{1}{2}(e^{2t^2} - 1)$$

#### Aufgabe 4

Es seien  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  und  $\Phi_4$  vier paarweise verschiedene Lösungen der Riccati-Differentialgleichung  $x' = f(t) + g(t)x + h(t)x^2$ . Dann gilt:

$$\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{\Phi_2 - \Phi_3} \cdot \frac{\Phi_2 - \Phi_4}{\Phi_1 - \Phi_4} \equiv \text{const}$$

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und den Übungen  
sowie das Problem der Woche finden Sie unter:

<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/>