TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. N. Steinmetz
Dipl.-Math. C. Claßen

Dortmund, 24. Juni 2013

Analysis II

12. Übungsblatt, Sommersemester 2013

Abgabe bis Montag, den 1. Juli 2013, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 *Höldersche Ungleichung*

Gegeben seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f(x,y) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$ für $x, y > 0$. Zeigen Sie:

a) Unter der Nebenbedingung $xy = 1$ besitzt f genau in $(1,1)$ ein mögliches Extremum.

b) In $(1,1)$ liegt eine Minimalstelle vor. (*Hinweis:* Untersuchen Sie $f(x, \frac{1}{x})$.)

c) Sind $a_j, b_j > 0$ für $j = 1, \ldots, n$, so gilt:
$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} {a_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} {b_j}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Hinweis zu c): Zeigen Sie die Ungleichung zuerst für $\sum_{j=1}^{n} {a_j}^p = \sum_{j=1}^{n} {b_j}^q = 1$.

Aufgabe 2 $\star$

a) Untersuchen Sie, ob $f(x,y,z) = (y^2 + 2xz, z^2 + 2xy, x^2 + 2yz)^T$ ein Gradientenfeld ist und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion von f.

b) Skizzieren Sie die Astroide $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ und berechnen Sie ihre Länge.

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende Integrale über γ nach der Bogenlänge:

a) $\int\limits_{\gamma} (x^2 + y)\, ds$ mit $\gamma(t) = (t, \cosh t)^T, 0 \leq t \leq 1$

b) $\int\limits_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, ds$ mit $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T, 0 \leq t \leq 2\pi$

Aufgabe 4 $\star$

Gegeben seien die Funktionen $f(x,y) = (-y,x)^T$ und $g(x,y) = \left(xe^{x^2+y^2}, ye^{x^2+y^2}\right)^T$.
Bestimmen Sie jeweils das Kurvenintegral von f bzw. g über folgende Wege γ:

a) $\gamma(t) = (t^\alpha, t^\beta)^T, \quad 0 \leq t \leq 1,\ \alpha, \beta > 0$

b) $\gamma(t) = (\sin t, 1 - \cos t)^T, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

c) γ sei der Polygonzug von $(0,0)$ über (x_0, y_0) nach $(1,1)$.