Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Amir Nasseri

Dortmund, 9. Januar 2013

Analysis III für Lehramt

12. Übungsblatt, WiSe 2012/13

Abgabe bis Mittwoch, 16.01.2013 in den Übungen

1) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   a) $\displaystyle\int_{|z-2i|=2} \frac{e^{\pi z/4}}{(iz+1)(z-1)^2}\,dz$

   b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}$

   c) $\displaystyle\int_{|2z-2|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz\,, \quad n\in\mathbb{N}$

2) Zeigen Sie:

   a) Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(z) := nz^n(z-1)$ konvergiert lokal gleichmäßig im Einheitskreis $\mathbb{D}$, aber nicht gleichmäßig in $\mathbb{D}$.

   b) Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} z^k$ konvergiert lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$, aber nicht gleichmäßig in $\mathbb{D}$.

   c) Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(z) := ze^{-nz^2}$ konvergiert lokal gleichmäßig im Winkelraum $W := \left\{ z\in\mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{4} \right\}$, aber nicht gleichmäßig in W.

3) Es sei f eine ganze Funktion, $m\in\mathbb{N}$ und $c>0$. Zeigen Sie:

   a) Ist $|f(z)| \le c(1+|z|^m)$ für alle $z\in\mathbb{C}$, so ist f ein Polynom mit $\operatorname{Grad} P \le m$.

   b) Ist $|f(z)| \ge 1$ für alle $z\in\mathbb{C}$, so ist f konstant.

   c) Ist $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ für alle $z\in\mathbb{C}$, so ist f konstant.

4) Es seien $D\subset\mathbb{C}$ ein Gebiet und $f,\ g\colon D\to\mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $f(z)g(z)=0$ für alle $z\in D$. Zeigen Sie, dass $f(z)=0$ für alle $z\in D$ oder $g(z)=0$ für alle $z\in D$.

   Hinweis: Sie dürfen dabei benutzen, dass jede überabzählbare Teilmenge von D einen Häufungspunkt in D besitzt.