

Analysis III für Lehramt

9. Übungsblatt, WiSe 2012/13

Abgabe bis Mittwoch, 12.12.2012 in den Übungen

- 1) Die nördliche Hemisphäre $\mathbb{S}_+^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ lässt sich auf verschiedene Arten parametrisieren. Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\psi_1: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi_1(\varphi, \theta) := (\sin \varphi \cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi \cos \theta)^\top.$$

Zum anderen lässt sich \mathbb{S}_+^2 als Graph der Funktion $h: U_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(u, v) := \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ darstellen (vergleiche 2.3.2(a)).

- a) Bestimmen Sie den Parameterwechsel zwischen diesen beiden Darstellungen.
- b) Bestimmen Sie die Tangentialebene an \mathbb{S}_+^2 im Nordpol $S = (0, 0, 1)$ und im Punkt $P = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$. Bestimmen Sie weiterhin den Normaleneinheitsvektor in diesen Punkten.
- 2) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche S des Torus T aus Aufgabe 1(a), Blatt 6.
- 3) Der Schwerpunkt S einer Fläche F in \mathbb{R}^3 ist gegeben durch

$$S := \frac{1}{\sigma(F)} \left(\int_F x \, d\sigma, \int_F y \, d\sigma, \int_F z \, d\sigma \right).$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt

- a) der nördlichen Hemisphäre \mathbb{S}_+^2 ,
- b) der Oberfläche S_+ des im Halbraum $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$ gelegenen Teils des Torus aus Aufgabe 1(a), Blatt 6.
- 4) a) Gegeben sei ein Flächenstück $S = G_f$ als Graph einer C^1 -Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt von S .
- b) Berechnen Sie auf diese Weise erneut den Flächeninhalt der nördlichen Hemisphäre \mathbb{S}_+^2 .
- c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von G_f für $f: U_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^2 - y^2$.