

## Analysis III für Lehramt

### 8. Übungsblatt, WiSe 2012/13

**Abgabe** bis Mittwoch, 05.12.2012 in den Übungen

1) Untersuchen Sie ob die folgenden Vektorfelder  $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  wirbelfrei sind und bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential:

- a)  $v(x, y) := (x, y)$ ,    b)  $v(x, y) := (xy, e^{xy})$ ,    c)  $v(x, y) := ((x-1)(y-1), x^2y)$ ,  
d)  $v(x, y) := (-xe^{xy}, ye^{xy})$ ,    e)  $v(x, y) := (2x + 3y^2, 6xy - e^y)$

2) Es sei  $D \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet. Weiter seien  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $v: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

- a)  $\operatorname{rot} \nabla f = 0$ ,    b)  $\operatorname{rot}(fv) = f \operatorname{rot} v + (\nabla f) \times v$ ,    c)  $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$ .

3) a) Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und für jede abgeschlossene Kugel  $K \subset \mathbb{R}^n$  gelte

$$\int_K f(x) d\lambda^n(x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann  $f(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

b) Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Vektorfelder  $v = (p, q)^\top: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die für alle glatten geschlossenen Kurven  $\Gamma$  in  $\mathbb{R}^2$  und alle  $c \in \mathbb{R}^2$  die Bedingung

$$\int_\Gamma \langle v(x), dx \rangle = \int_\Gamma \langle v(x+c), dx \rangle$$

erfüllen.

*Hinweis:* Verwenden Sie den Integralsatz von GREEN und Teil (a).

4) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche  $A$ , die von dem Intervall  $[0, 2\pi]$  und der Kurve  $\Gamma$  mit der Parameterdarstellung  $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^\top$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  berandet wird.