

Analysis III für Lehramt

7. Übungsblatt, WiSe 2012/13

Abgabe bis Mittwoch, 28.11.2012 in den Übungen

- 1) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und (f_j) eine Folge messbarer Funktionen $f_j: K \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- a) $|f_j(x)| \leq 1$ für alle $x \in K$ und $j \in \mathbb{N}$,
b) der Grenzwert $f(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ existiert für jedes $x \in K$.

Zeigen Sie, dass $f_j, f \in \mathcal{L}^1(K)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_K f_j(x) d\lambda^n(x) = \int_K f(x) d\lambda^n(x).$$

Kann man die Voraussetzung (a) weglassen?

Kann man die Voraussetzung der Kompaktheit von K abschwächen?

- 2) Berechnen Sie jeweils die Kurvenintegrale $\int_{\Gamma} \langle v(x, y), d(x, y) \rangle$:

- a) $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $v(x, y) := (x^2 + xy^2, y^3 + x^2y)^\top$ und $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) := \begin{cases} (1 - \frac{2t}{\pi}, 0)^\top & \text{für } 0 \leq t \leq \pi, \\ (\cos t, \sin t)^\top & \text{für } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

- b) $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $v(x, y) := (y, -x)^\top$ und $\gamma: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := e^{-t}(\cos t, \sin t)^\top$

- 3) Es sei $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $(0, \infty)$ und das Vektorfeld $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$v(x, y) = (-\varphi(r)y, \varphi(r)x)^\top,$$

wobei $r = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\Gamma} \langle v(x, y), d(x, y) \rangle$, wobei Γ die einmal positiv durchlaufene Kreislinie um $(0, 0)$ mit Radius $R > 0$ ist.

- 4) Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet $v: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein konservatives Vektorfeld mit Potential ϕ und Γ eine Kurve in D mit einer zweimal stetig differenzierbaren Parameterdarstellung $\gamma: [a, b] \rightarrow D$. Weiter gelte das Newtonsche Bewegungsgesetz

$$\gamma''(t) = v(\gamma(t)), \quad t \in [a, b].$$

Verifizieren Sie den Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \Big|_a^b = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)).$$