

Analysis III für Lehramt

6. Übungsblatt, WiSe 2012/13

Abgabe bis Mittwoch, 21.11.2012 in den Übungen

1) Berechnen Sie das Volumen

a) des *Torus* $T \subset \mathbb{R}^3$, der durch Rotation der Kreisscheibe

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 5)^2 + z^2 \leq 1\}$$

um die z -Achse entsteht,

b) des *Ellipsoids*

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

mit $a, b, c > 0$,

c) der Menge

$$M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} \leq 1 \right\}.$$

2) Es sei $a > 0$. Die *Lemniskate* $L \subset \mathbb{R}^2$ ist die Menge aller Punkte, für die das Produkt der Abstände von den Punkten $(-a, 0)$ und $(a, 0)$ den Wert a^2 besitzt.

a) Skizzieren Sie L und begründen Sie, dass

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\}.$$

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der „rechten Schlaufe“ begrenzt wird.

3) Berechnen Sie den Schwerpunkt

a) der Halbkugel $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$,

b) des im Halbraum $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$ gelegenen Teils T_x des Torus aus Aufgabe 1 (a),

c) des im Halbraum $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ gelegenen Teils T_z des Torus aus Aufgabe 1 (a).

4) Geben Sie eine Kurve $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma([0, 2\pi]) = K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = 2ax(x^2 + y^2) + a^2y^2\}$$

an, berechnen Sie deren Länge und den Inhalt der berandeten Fläche.