

Analysis III für Lehramt

4. Übungsblatt, WiSe 2012/13

Abgabe bis Mittwoch, 07.11.2012 in den Übungen

1) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte sofern sie existieren:

(a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^{2n}}$$

(b)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cdot \sin x \, dx$$

Hinweis: Sie dürfen in (b) benutzen, dass für $n \geq x \geq 0$ gilt

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

2) Beweisen Sie Satz 11.4.5 über parameterabhängige Integrale.

Anleitung: Betrachten Sie zum Nachweis der Stetigkeit in $x_0 \in D$ eine Funktionenfolge der Art $f_k: E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(y) := f(x_k, y)$ und wenden Sie den Satz von LEBESGUE über majorisierte Konvergenz an. Finden Sie für den Nachweis der Differenzierbarkeit selbst eine geeignete Funktionenfolge.

3) Es seien $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 2ye^{-x-y^2} & \text{für } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die iterierten Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dx \, dy, \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dy \, dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x, y) \, dx \, dy, \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x, y) \, dy \, dx$$

und entscheiden Sie, ob f und g LEBESGUE-integrierbar sind.

4) Berechnen Sie das Volumen des Rotationsparaboloids

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

und der Menge

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1\}.$$