

## Analysis III für Lehramt

### 3. Übungsblatt, WS 2012/13

**Abgabe** bis Mittwoch, 31.10.2012 in den Übungen

- 1) Es seien  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  messbare Mengen und  $A \subset B$ . Zeigen Sie, dass  $B \setminus A$  messbar ist und  $\lambda(B \setminus A) = \lambda(B) - \lambda(A)$ .
- 2) Konstruieren Sie eine unbeschränkte messbare Menge  $A \subset \mathbb{R}$  deren Maß positiv und endlich ist.
- 3) Zeigen Sie:
  - a) Ist  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine messbare Funktion und  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, so ist das Urbild  $f^{-1}(I)$  messbar.
  - b) Sind  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Funktionen, ist  $f$  messbar und ist  $g(x) = f(x)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , so ist auch  $g$  messbar.
  - c) Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  LIPSCHITZ-stetig (dies bedeutet, dass es eine Konstante  $m > 0$  gibt mit  $|f(x) - f(y)| \leq m|x - y|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ ) und  $N \subset \mathbb{R}$  eine Nullmenge, so ist  $f(N)$  eine Nullmenge.
- 4) Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine RIEMANN-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass  $f$  dann auf  $[a, b]$  auch LEBESGUE-integrierbar ist und dass gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

*Hinweis:* Konstruieren Sie geeignete Folgen  $(u_n), (v_n)$  von Treppenfunktionen mit  $u_n(x) \leq u_{n+1}(x) \leq f(x) \leq v_{n+1}(x) \leq v_n(x)$  für  $x \in [a, b]$  und wenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz an.