Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Amir Nasseri

Dortmund, 17. Oktober 2012

Analysis III für Lehramt

2. Übungsblatt, WS 2012/13

Abgabe bis Mittwoch, 24.10.2012 in den Übungen

1) a) Zeigen Sie, dass jede überabzählbare Menge $M \subset \mathbb{R}$ mindestens einen Häufungspunkt besitzt.

   b) Kann man die Aussage in (a) noch verschärfen?

   c) Gilt die Aussage in (a) auch für abzählbare Mengen?

   d) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *perfekt*, wenn $M' = M$ gilt, wobei M' die Menge aller Häufungspunkte von M bezeichnet. Zeigen Sie, dass jede perfekte Menge $M \subset \mathbb{R}$ überabzählbar ist.

2) a) Zeigen Sie: Zu jeder Folge (Q_k) abgeschlossener Quader und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folge (P_k) halboffener Quader mit $Q_k \subset P_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(P_k) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(Q_k) < \varepsilon\,.$$

   b) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es eine Folge (Q_k) abgeschlossener Quader mit $M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^n(Q_k) < \varepsilon$. Zeigen Sie, dass M eine Nullmenge ist.

   c) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass der Graph G_f von f eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ ist.

3) Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $A_k \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Ferner seien B, $C \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Zeigen Sie:

   a) Ist $B \subset C$, so ist $\lambda(B) \leq \lambda(C)$.

   b) Ist $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ messbar mit $\lambda(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda(A_k)$.

4) Es sei $f\colon [a,b] \to (0,\infty)$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\,,\ a \leq x \leq b \,\}$$

messbar ist und

$$\lambda^2(M) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$