

Analysis III für Lehramt

1. Übungsblatt, WS 2012/13

Abgabe bis Mittwoch, 17.10.2012, in den Übungen

Die folgenden Aufgaben sind eine Wiederholung über Mächtigkeit, Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit von Mengen. Dabei ist eine abzählbare Menge gleichmächtig zu \mathbb{N} .

1) Zeigen Sie:

- a) Jede unendliche Menge M besitzt eine abzählbare Teilmenge.
- b) Eine Menge M ist unendlich genau dann, wenn Sie eine echte Teilmenge gleicher Mächtigkeit besitzt.

2) Zeigen Sie:

- a) Sind A und B abzählbar, so ist auch $A \times B$ abzählbar.
- b) Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge M_n abzählbar, so ist $M := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ abzählbar.
- c) Die Mengen \mathbb{Z} und \mathbb{Q} sind abzählbar.

3) Zeigen Sie:

- a) Das offene Intervall $(0, 1)$ und \mathbb{R} sind gleichmächtig.
- b) Die Intervalle $(0, 1)$, $[0, 1)$ und $[0, 1]$ sind gleichmächtig. Konstruieren Sie hierzu explizit bijektive Abbildungen $f: (0, 1) \rightarrow [0, 1)$ und $g: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$.
- c) Ist M eine überabzählbare Menge und A eine abzählbare Teilmenge von M , so sind M und $M \setminus A$ gleichmächtig.

4) Zeigen Sie:

- a) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ von \mathbb{N} ist gleichmächtig zur Menge M aller Folgen (a_n) mit $a_n \in \{0, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- b) Die Menge B aller Folgen $(b_n) \in M$, die höchstens endlich viele Einsen enthalten, ist abzählbar und die Menge M ist überabzählbar.
- c) Die Menge C aller Folgen $(c_n) \in M$, die unendlich viele Nullen enthalten und das Intervall $[0, 1)$ sind gleichmächtig. Benutzen Sie dazu die Binärdarstellung reeller Zahlen.
- d) Die Mengen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $(0, 1)$ und \mathbb{R} sind gleichmächtig und überabzählbar.