Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Analysis III für Lehramt

1. Klausur, WiSe 2009/10

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es sei K der Körper, der durch Rotation der Ellipse

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 \leq 1$$

um die z-Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen von K.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie: Ist $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, messbare Funktion, so ist f Lebesgue-integrierbar auf $[0,1]$.

b) Zeigen Sie: Ist (f_n) eine Folge beschränkter, messbarer Funktionen auf $[0,1]$ und konvergiert (f_n) gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f, so ist f Lebesgue-integrierbar auf $[0,1]$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n \, d\lambda = \int\limits_{[0,1]} f \, d\lambda \,.$$

c) Gilt die Aussage in (b) auch, wenn man das Intervall $[0,1]$ durch $[0,\infty)$ ersetzt?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Gegeben seien das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$v(x,y) := \left((1-2x)y^2\,,\ 2xy(1-x)\right)^\top$$

und der Weg $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := (1+3\cos t, 1+3\sin t)^\top$. Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld v ein Potential besitzt und berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_\gamma \langle v(x,y), d(x,y)\rangle$.

b) Gegeben seien das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$v(x,y) := \left((1+2x)y^2\,,\ -2xy(1-x)\right)^\top$$

und der Weg $\gamma\colon \left[0,\tfrac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := \left(t, \dfrac{1}{1-t}\right)^\top$. Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld v ein Potential besitzt und berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_\gamma \langle v(x,y), d(x,y)\rangle$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $v\colon D \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld und $\phi\colon D \to \mathbb{R}$ ein Potential von v. Weiterhin sei Γ eine glatte Kurve in D mit der Parameterdarstellung $\gamma\colon [a,b] \to D$. Zeigen Sie

$$\int_\Gamma \langle v(x), dx\rangle = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))\,.$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z+1)(z-5)}\,dz$

b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}{z^2(z+3)}\,dz$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie für $r > 0$ das Bild des Kreises $\{\, z \in \mathbb{C} : |z| = r \,\}$ unter der Funktion

$$f(z) := \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

b) Bestimmen Sie für $r > 0$ das Bild der Geraden $\{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = r \,\}$ unter der Sinusfunktion.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f eine in D holomorphe Funktion und $z_0 \in D$ eine m-fache Nullstelle von f. Weiter sei $g\colon D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}\,.$$

Zeigen Sie, dass g in z_0 eine hebbare Singularität besitzt und bestimmen Sie $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}$$

mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten.

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1 = (y-x)^2 + 1\,, \quad y(0) = y_0\,.$$

a) Bestimmen Sie die Lösung von $(*)$ für $y_0 = 0$ durch Raten.

b) Zur Bestimmung der Lösung von $(*)$ für $y_0 \neq 0$ substituieren Sie $y(x) = x + \dfrac{1}{u(x)}$, leiten Sie eine Differentialgleichung für u her und lösen Sie diese.

c) Bestimmen Sie das maximale Definitionsintervall der Lösungen von $(*)$ in Abhängigkeit von y_0.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Es sei $X = (X, d)$ ein metrischer Raum und $g\colon X \to X$ eine kontrahierende Abbildung. Weiter sei $x_0 \in X$ und die Folge (x_n) in X sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} := g(x_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Zeigen Sie, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.