Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 8. Februar 2017

Analysis III für Lehramt

Lösungen zu einigen ausgewählten Aufgaben, WiSe 2016/17

Blatt 7, Aufgabe 1

Wir bezeichnen den Schwerpunkt jeweils mit $S = (x_s, y_s, z_s)$.

b) Für die Masse gilt nach Aufgabe 3 (a) auf Blatt 6 $m(T_x) = 5\pi^2$. Aus Symmetriegründen folgt sofort $y_s = z_s = 0$. Weiter erhalten wir mit Hilfe von Zylinderkoordinaten

$$x_s = \frac{1}{m(T_x)} \iiint_{T_x} x\, d(x,y,z) = \frac{2}{5\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_4^6 \int_0^{\sqrt{1-(r-5)^2}} r^2 \cos\varphi \, dz\, dr\, d\varphi$$

$$= \frac{4}{5\pi^2} \int_4^6 r^2 \sqrt{1-(r-5)^2}\, dr = \frac{4}{5\pi^2} \int_{-1}^1 (r+5)^2 \sqrt{1-r^2}\, dr$$

$$= \frac{4}{5\pi^2} \int_{-1}^1 r^2 \sqrt{1-r^2}\, dr + 0 + \frac{20}{\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-r^2}\, dr\,.$$

Das zweite Integral kennen wir bereits aus Aufgabe 3 (a) auf Blatt 6 und das erste kann man z.B. mit partieller Integration berechnen indem man schreibt

$$r^2\sqrt{1-r^2} = r \cdot r\sqrt{1-r^2}\,.$$

Natürlich ist auch die Substitution $r = \sin t$ möglich. Insgesamt erhält man dann

$$x_s = \tfrac{101}{10\pi}\,.$$

c) Für die Masse gilt wieder $m(T_z) = 5\pi^2$. Aus Symmetriegründen folgt sofort $x_s = y_s = 0$. Weiter erhalten wir mit Hilfe von Zylinderkoordinaten

$$z_s = \frac{1}{m(T_z)} \iiint_{T_x} z\, d(x,y,z) = \frac{1}{5\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_4^6 \int_0^{\sqrt{1-(r-5)^2}} rz \, dz\, dr\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{5\pi} \int_4^6 r(1-(r-5)^2)\, dr = \frac{1}{5\pi} \int_{-1}^1 (r+5)(1-r^2)\, dr = \frac{4}{3\pi}\,.$$

Blatt 10, Aufgabe 1

b) Es sei $S = (x_s, y_s, z_s)$. Aus Symmetriegründen gilt $y_s = z_s = 0$. Nach Aufgabe 4 auf Blatt 9 ist $\sigma(S_+) = 10\pi^2$. Zur Berechnung des Integrals

$$\int_{\mathbb{S}^2_+} x \, d\sigma$$

benutzen wir die Parameterdarstellung aus Aufgabe 4 auf Blatt 9, wobei jetzt $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann ist

$$\int_{S_+} x \, d\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi (5 + \cos\theta)^2 \, d\varphi \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (5 + \cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= 2 \cdot 51\pi = 102\pi \, .$$

Insgesamt ergibt sich also $x_s = \frac{51}{5\pi}$.

Blatt 10, Aufgabe 4

b) Wir schreiben $f = u + iv$. Dann ist $u^2 + v^2 = c$ eine konstante Funktion. Ist $c = 0$, so folgt sofort $u = v = 0$ und damit $f = 0$. Also sei $c \neq 0$. Ableiten nach x und y ergibt

$$u_x u + v_x v = 0 \, , \quad u_y u + v_y v = 0 \, . \tag{$*$}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit u_y, die zweite mit u_x und subtrahieren die Gleichungen. Dann folgt

$$v_x u_y v - v_y u_x v = 0 \, .$$

Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt dann

$$(v_x^2 + v_y^2) v = 0 \, .$$

Dies bedeutet $v(x, y) = 0$ oder $(v_x(x, y))^2 + (v_y(x, y))^2 = 0$. Ist $v(x, y) = 0$, so folgt aus $(*)$ $u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0$ (da $c \neq 0$) und daher ergibt sich aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auch $v_x(x, y) = v_y(x, y) = 0$. Ist andererseits $(v_x(x, y))^2 + (v_y(x, y))^2 = 0$, so folgt $v_x(x, y) = v_y(x, y) = 0$ und daher ergibt sich aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auch $u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0$.

Insgesamt folgt also $u_x(x, y) = u_y(x, y) = v_x(x, y) = v_y(x, y)$ für alle $(x, y) \in D$ und damit sind u und v konstant. Also ist auch f konstant.