TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. RAINER BRÜCK
DR. CHRISTOPHER CLASSEN

Dortmund, 6. Februar 2017

Analysis III für Lehramt

Lösungen zum 14. Übungsblatt, WiSe 2016/17

1) $y' = 1 + 2xy - y^2$, $y(0) = 0$: Definieren wir $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = 1 + 2xy - y^2$, so ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$, und es gilt für x, y_1, $y_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = 2x(y_1 - y_2) - (y_1^2 - y_2^2) = (2x - y_1 - y_2)(y_1 - y_2)\,.$$

Ist $n \in \mathbb{N}$, so folgt für x, y_1, $y_2 \in [-n, n]$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |2x - y_1 - y_2||y_1 - y_2| \leq 4n|y_1 - y_2|\,.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es also ein $\delta > 0$ so, dass das obige Anfangswertproblem genau eine Lösung im Intervall $(-\delta, \delta)$ besitzt.

Man erkennt aus der Differentialgleichung sofort (mit Induktion), dass die Lösung y unendlich oft differenzierbar ist. Daher können wir die Differentialgleichung beliebig oft implizit differenzieren. Wegen $y(0) = 0$ folgt aus der Differentialgleichung $y'(0) = 1$. Implizites Differenzieren liefert

$$y'' = 2y + 2xy' - 2yy'$$

und wegen $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ folgt hieraus $y''(0) = 0$. Weiteres Differenzieren ergibt

$$y''' = 4y' + 2xy'' - 2(y')^2 - 2yy''$$

und hieraus folgt wie oben $y'''(0) = 2$. Schließlich folgt

$$y^{(4)} = 6y'' + 2xy''' - 6y'y'' - 2yy'''$$

und daher $y^{(4)}(0) = 0$. Somit lauten die Taylorpolynome

$$T_1(x) = x\,, \quad T_2(x) = x\,, \quad T_3(x) = x + \tfrac{1}{3}\,x^3\,, \quad T_4(x) = x + \tfrac{1}{3}\,x^3\,.$$

Nun bestimmen wir die Picard-Iterierten y_k $(k = 1, 2, 3, 4)$. Es gilt

$$y_k(x) = \int_0^x \left(1 + 2ty_{k-1}(t) - (y_{k-1}(t))^2\right)\,dt\,.$$

Mit $y_0(x) \equiv 0$ folgt dann

$$y_1(x) = \int_0^x dt = x = T_1(x)\,.$$

Weiter folgt

$$y_2(x) = \int_0^x (1 + 2t^2 - t^2)\,dt = \int_0^x (1+t^2)\,dt = x + \tfrac{1}{3}\,x^3 = T_3(x)\,.$$

Ebenso erhalten wir

$$y_3(x) = x + \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{1}{63}\,x^7$$

und

$$y_4(x) = x + \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{1}{63}\,x^7 + \tfrac{2}{2079}\,x^{11} - \tfrac{1}{59535}\,x^{15}\,.$$

2) Wir betrachten das Beispiel $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $f(x) := x + \frac{1}{1+x}$. Dann gilt für x, $y \in [0,\infty)$

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= x + \frac{1}{1+x} - y - \frac{1}{1+y} = (x-y) + \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right) \\ &= (x-y) - \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} = (x-y)\left(1 - \frac{1}{(1+x)(1+y)}\right) \end{aligned}$$

und daher

$$|f(x) - f(y)| = |x-y|\left(1 - \frac{1}{(1+x)(1+y)}\right) < |x-y|\,.$$

Falls f einen Fixpunkt ξ hätte, so müsste gelten $f(\xi) = \xi$, also $\xi = \xi + \frac{1}{1+\xi}$, d.h. $\frac{1}{1+\xi} = 0$, was aber nicht möglich ist.

3) Sind $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, so hat das Anfangswertproblem $y' = g(x)h(y)$, $y(x_0) = y_0$ genau eine Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die Aussage ist in dieser Form im Allgemeinen falsch. Dies zeigt das Beispiel $g(x) = 1$, $h(y) = 1 + y^2$, $x_0 = y_0 = 0$. Die Lösung dieses Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = \tan x$$

und diese Lösung existiert nur auf dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und nicht auf ganz $\mathbb{R}$.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine entsprechende wahre Aussage zu formulieren. Da g stetig auf $\mathbb{R}$ ist, ist g auf jedem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante $M = M_I$ mit $|g(x)| \le M$ für alle $x \in I$. Da h' stetig auf $\mathbb{R}$ ist, ist h' auf jedem kompakten Intervall $J \subset \mathbb{R}$ beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante $L = L_J$ mit $|h'(y)| \le L$ für alle $y \in J$. Aus dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt dann sofort $|h(y_1) - h(y_2)| \le L|y_1 - y_2|$ für alle y_1, $y_2 \in J$. Wählt man nun I und J so, dass $x_0 \in I^\circ$ und $y_0 \in J^\circ$, so folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, dass es ein $\delta > 0$ gibt so, dass das Anfangswertproblem genau eine Lösung $y\colon U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ besitzt. Eine wahre Aussage lautet also wie folgt:

Sind $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, so gibt es ein $\delta > 0$ so, dass das Anfangswertproblem $y' = g(x)h(y)$, $y(x_0) = y_0$ genau eine Lösung $y\colon U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ besitzt.

Setzt man zusätzlich voraus, dass g und h' beschränkt auf $\mathbb{R}$ sind, so folgt aus den obigen Überlegungen, dass die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf auf ganz $\mathbb{R}^2$ erfüllt sind und dies garantiert die Existenz der Lösung des Anfangswertproblems auf ganz $\mathbb{R}$. Die Stetigkeit von h' wird dann allerdings nicht mehr benötigt. Die entsprechende Aussage lautet also:

Sind $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, g und h' beschränkt auf $\mathbb{R}$ und x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, so hat das Anfangswertproblem $y' = g(x)h(y)$, $y(x_0) = y_0$ genau eine Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4) a) $y' + 4xy = 8x^3$, $y(0) = 1$: Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet

$$y_h(x) = ce^{-2x^2}\,.$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung machen wir den Ansatz

$$y(x) = c(x)e^{-2x^2}\,.$$

Ableiten und einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$c'(x)e^{-2x^2} - 4xc(x)e^{-2x^2} + 4xc(x)e^{-2x^2} = 8x^3$$

und daher

$$c'(x) = 8x^3e^{2x^2}\,.$$

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} c(x) &= \int 8x^3e^{2x^2} = 4\int x^2 \cdot 4xe^{2x^2}\,dx = 4x^2e^{2x^2} - 2\int 4xe^{2x^2}\,dx \\ &= 4x^2e^{2x^2} - 2e^{2x^2} = 2(2x^2-1)e^{2x^2} \end{aligned}$$

und daher lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = ce^{-2x^2} + 2(2x^2-1)\,.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ liefert $c = 3$, also

$$y(x) = 3e^{-2x^2} + 2(2x^2-1)\,.$$

b) Wir substituieren

$$u(x) = (y(x))^\beta$$

wobei wir β noch geeignet wählen werden. Ableiten und einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} u' &= \beta y^{\beta-1} y' = \beta y^{\beta-1}(p(x)y + q(x)y^\alpha) = \beta p(x) y^\beta + \beta q(x) y^{\beta+\alpha-1} \\ &= \beta p(x) u + \beta q(x) y^{\beta+\alpha-1} . \end{aligned}$$

Wählen wir nun $\beta = 1 - \alpha$, so ergibt sich für u die lineare Differentialgleichung

$$u' + (\alpha - 1)p(x)u = (1-\alpha)q(x) ,$$

d.h.

$$u' + f(x)u = g(x)$$

mit

$$f(x) = (\alpha - 1)p(x) , \quad g(x) = (1-\alpha)q(x) .$$

c) $(1+x)y' = y - y^2$, $y(0) = 1$: Wir schreiben die Differentialgleichung in der Form

$$y' = \frac{1}{1+x}\, y - \frac{1}{1+x}\, y^2 .$$

Substitution $u(x) = y(x)^{-1} = \frac{1}{y(x)}$ liefert

$$u' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{1+x}\, u + \frac{1}{1+x} \iff u' + \frac{1}{1+x}\, u = \frac{1}{1+x} .$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet für $x > -1$

$$u_h(x) = ce^{-\log(1+x)} = \frac{c}{1+x} .$$

Nun bestimmen wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten, d.h. mit dem Ansatz

$$u(x) = \frac{c(x)}{1+x} .$$

Ableiten und einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\frac{c'(x)}{1+x} - \frac{c(x)}{(1+x)^2} + \frac{c(x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} .$$

Hieraus folgt $c'(x) = 1$ und damit $c(x) = x$. Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$u(x) = \frac{c}{1+x} + \frac{x}{1+x} = \frac{c+x}{1+x} .$$

Rücksubstitution ergibt

$$y(x) = \frac{1+x}{c+x} .$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ liefert $c = 1$ und daher

$$y(x) = 1\,.$$

Diese Lösung hätte man natürlich auch erraten können, aber die Lösung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ nicht mehr, denn diese lautet

$$y(x) = \frac{2(1+x)}{1+2x}\,.$$