

Analysis III für Lehramt

14. Übungsblatt, WiSe 2016/17

Keine Abgabe, keine Korrektur!

- 1) Bestimmen Sie die Picard-Iterierten y_k ($k = 1, 2, 3, 4$) für das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + 2xy - y^2, \quad y(0) = 0$$

sowie die Taylorpolynome T_k ($k = 1, 2, 3, 4$) der Lösung im Punkt $x_0 = 0$.

- 2) Zeigen Sie, dass die Bedingung $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ anstelle der Kontraktionsbedingung im Banachschen Fixpunktsatz nicht hinreichend ist. Betrachten Sie dazu das Beispiel $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $f(x) := x + \frac{1}{1+x}$.

- 3) Prüfen Sie ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist (Beweis oder Gegenbeispiel):
Sind $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, so hat das Anfangswertproblem $y' = g(x)h(y)$, $y(x_0) = y_0$ genau eine Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Falls die Aussage falsch ist, formulieren Sie eine entsprechende wahre Aussage und beweisen Sie diese.

- 4) a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + 4xy = 8x^3, \quad y(0) = 1.$$

- b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha$$

mit stetigen Funktionen p und q auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
Substituieren Sie $u = y^\beta$ mit einem geeigneten $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass sich eine lineare Differentialgleichung für u ergibt.

- c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1+x)y' = y - y^2, \quad y(0) = 1$$

mit Hilfe der in (b) entwickelten Lösungsmethode.