Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 30. Januar 2017

Analysis III für Lehramt

13. Übungsblatt, WiSe 2016/17

Abgabe bis Montag, 06.02.2017, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 bzw. 30 im Foyer

1) Es sei f eine ganze Funktion, $m \in \mathbb{N}$ und $c > 0$. Zeigen Sie:

   a) Ist $|f(z)| \leq c(1 + |z|^m)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f ein Polynom mit $\operatorname{Grad} P \leq m$.

   b) Ist $|f(z)| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

   c) Ist $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

2) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f,\, g\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $f(z)g(z) = 0$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie, dass $f(z) = 0$ für alle $z \in D$ oder $g(z) = 0$ für alle $z \in D$.

   Hinweis: Sie dürfen dabei benutzen, dass jede überabzählbare Teilmenge von D einen Häufungspunkt in D besitzt.

3) Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

   a) $y' = 1 + y^2$

   b) $y' = (y+2)^2$

   c) $y' = 2x(y^2 - y)$

   d) $y' = (x+y)^2$
   Substituieren Sie $u = x + y$ und leiten Sie zunächst eine Differentialgleichung für u her.

   e) $y' = 1 - \dfrac{y}{x}$
   Substituieren Sie $y = xu$ und leiten Sie zunächst eine Differentialgleichung für u her.

4) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme. Geben Sie jeweils auch an, auf welchem Intervall die Lösung (maximal) definiert ist.

   a) $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$

   b) $y' = 2x(y^2 - y), \quad y(0) = 2$

   c) $y' = 1 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}, \quad y(1) = 1$

   d) $y' = \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{2y}, \quad y(1) = 1$