

Analysis III für Lehramt

12. Übungsblatt, WiSe 2016/17

Abgabe bis Montag, 30.01.2017, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 bzw. 30 im Foyer

1) Es sei J die Joukowski-Abbildung aus Aufgabe 4 auf Blatt 11. Dann ist $\cos z = J(e^{iz})$ für $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ die Bilder der vertikalen Geraden $G_x = \{x + iy : y \in \mathbb{R}\}$ und der horizontalen Geraden $G_y = \{x + iy : x \in \mathbb{R}\}$ unter der Kosinusfunktion.

2) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_{|z|=1} \bar{z} dz$

b) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+3)}$

c) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z}$, wobei die Kurve Γ gegeben ist durch die Parameterdarstellung

$$\gamma: [0, 7\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) := t + i \sin t.$$

3) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_{|z-2i|=2} \frac{e^{\pi z/4}}{(iz+1)(z-1)^2} dz$

b) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}$

c) $\int_{|2z-2|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz, \quad n \in \mathbb{N}$

4) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine in D holomorphe Funktion.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $\zeta \in D$ gilt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{|f^{(k)}(\zeta)|}{k!}} < \infty.$$

b) Welche genauere Aussage gilt, wenn $D = \mathbb{C}$, d.h. wenn f eine ganze Funktion ist?