

## Analysis III für Lehramt

### 11. Übungsblatt, WiSe 2016/17

**Abgabe** bis Montag, 16.01.2017, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 bzw. 30 im Foyer

- 1) Zeigen oder widerlegen Sie: Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt  $|\sin z| \leq 1$ .
- 2) Es seien  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  mit  $ad - bc \neq 0$ ,  $D := \mathbb{C}$  für  $c = 0$  und  $D := \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$  für  $c \neq 0$ . Weiter sei  $T: D \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}.$$

- a) Zeigen Sie, dass  $T$  holomorph und injektiv in  $D$  ist und berechnen Sie  $T'$ . Bestimmen Sie weiterhin die Bildmenge  $G = T(D)$ , sodass  $T: D \rightarrow G$  bijektiv ist. Bestimmen Sie schließlich die Umkehrfunktion  $T^{-1}: G \rightarrow D$ .
- b) Betrachten Sie jetzt speziell

$$T(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

wobei  $a \in \mathbb{D}$ . Zeigen Sie, dass  $T$  die Mengen  $\mathbb{D}$  und  $\partial\mathbb{D}$  jeweils bijektiv auf sich abbildet.

- 3) Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$  mit
  - a)  $z^5 = \bar{z}$ ,
  - b)  $(z - 1)^6 = (z + 1)^6$ .
- 4) Gegeben sei die Joukowski-Abbildung  $J(z) := \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ .
  - a) Bestimmen Sie die Bilder der Kreise  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$  unter  $J$  für  $r > 0$ .
  - b) Bestimmen Sie die Bilder der Strahlen  $\{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0\}$  unter  $J$  für  $\theta \in (-\pi, \pi]$ .
  - c) Bestimmen Sie das Bild des Kreisrings  $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$  unter  $J$ .