Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 19. Dezember 2016

Analysis III für Lehramt

10. Übungsblatt, WiSe 2014/15

Abgabe bis Montag, 09.01.2017, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 bzw. 30 im Foyer

1) Der Schwerpunkt S einer Fläche F in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$S := \frac{1}{\sigma(F)} \left(\int_F x\, d\sigma, \int_F y\, d\sigma, \int_F z\, d\sigma \right).$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt

a) der nördlichen Hemisphäre $\mathbb{S}^2_+$,

b) der Oberfläche S_+ des im Halbraum $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \}$ gelegenen Teils des Torus aus Aufgabe 3 (a), Blatt 6.

2) a) Gegeben sei ein Flächenstück $S = G_f$ als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt von S.

b) Berechnen Sie auf diese Weise erneut den Flächeninhalt der nördlichen Hemisphäre $\mathbb{S}^2_+$.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von G_f für $f\colon U_1(0) \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^2 - y^2$.

3) Zeigen Sie: Kreise (d.h. Kreislinien) und Geraden lassen sich in $\mathbb{C}$ einheitlich darstellen durch eine Gleichung der Form

$$(*) \qquad \varepsilon z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + \alpha = 0$$

mit ε, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{C}$.

4) a) Untersuchen Sie, in welchen $z \in \mathbb{C}$ die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := z \operatorname{Re} z$ komplex differenzierbar ist.

b) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f holomorph in D. Zeigen Sie: Ist $|f|$ konstant, so ist f konstant.

c) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen der Form $f(z) = u(x) + iv(y)$, wobei $z = x + iy$ und u, $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind.

Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr