Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 12. Dezember 2016

Analysis III für Lehramt

9. Übungsblatt, WiSe 2016/17

Abgabe bis Montag, 19.12.2016, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 bzw. 30 im Foyer

1) a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und für jede abgeschlossene Kugel $K \subset \mathbb{R}^n$ gelte
$$\int_K f(x)\, d\lambda^n(x) = 0\,.$$
Zeigen Sie, dass dann $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

   b) Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Vektorfelder $v = (p,q)^\top \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die für alle glatten, geschlossenen Kurven Γ in $\mathbb{R}^2$ und alle $c \in \mathbb{R}^2$ die Bedingung
$$\int_\Gamma \langle v(x), dx\rangle = \int_\Gamma \langle v(x+c), dx\rangle$$
erfüllen.

   Hinweis: Verwenden Sie den Integralsatz von Green und Teil (a).

2) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die von dem Intervall $[0,2\pi]$ und der Kurve Γ mit der Parameterdarstellung $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^\top$, $t \in [0,2\pi]$ berandet wird.

3) Die nördliche Hemisphäre $\mathbb{S}^2_+ := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z > 0 \,\}$ lässt sich auf verschiedene Arten parametrisieren. Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch
$$\psi_1\colon \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \times \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3\,, \quad \psi_1(\varphi,\theta) := (\sin\varphi\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi\cos\theta)^\top\,.$$
Zum anderen lässt sich $\mathbb{S}^2_+$ als Graph der Funktion $h\colon U_1(0) \to \mathbb{R}$ mit $h(u,v) := \sqrt{1-u^2-v^2}$ darstellen (vergleiche 11.3.2 (a)).

   a) Bestimmen Sie den Parameterwechsel zwischen diesen beiden Darstellungen.

   b) Bestimmen Sie die Tangentialebene an $\mathbb{S}^2_+$ im Nordpol $S = (0,0,1)$ und im Punkt $P = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$. Bestimmen Sie weiterhin den äußeren Normaleneinheitsvektor in diesen Punkten.

4) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche S des Torus T aus Aufgabe 3 (a), Blatt 6.