Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 5. Dezember 2016

Analysis III für Lehramt

8. Übungsblatt, WiSe 2016/17

Abgabe bis Montag, 12.12.2016, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 bzw. 30 im Foyer

1) Es sei $\varphi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig auf $(0,\infty)$ und das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$v(x,y) = (-\varphi(r)y, \varphi(r)x)^\top ,$$

wobei $r = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\Gamma \langle v(x,y), d(x,y)\rangle$, wobei Γ die einmal positiv durchlaufene Kreislinie um $(0,0)$ mit Radius $R>0$ ist.

2) Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet $v\colon D \to \mathbb{R}^n$ ein konservatives Vektorfeld mit Potential ϕ und Γ eine Kurve in D mit einer zweimal stetig differenzierbaren Parameterdarstellung $\gamma\colon [a,b] \to D$. Weiter gelte das Newtonsche Bewegungsgesetz

$$\gamma''(t) = v(\gamma(t)), \quad t \in [a,b].$$

Verifizieren Sie den Energieerhaltungssatz

$$\tfrac{1}{2} \langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle \Big|_a^b = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)).$$

3) Untersuchen Sie ob die folgenden Vektorfelder $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wirbelfrei sind und bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential:

a) $v(x,y) := (x,y)^\top$,
b) $v(x,y) := (xy, e^{xy})^\top$,
c) $v(x,y) := ((x-1)(y-1), x^2y)^\top$,
d) $v(x,y) := (-xe^{xy}, ye^{xy})^\top$,
e) $v(x,y) := (2x+3y^2, 6xy-e^y)^\top$

4) Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Weiter seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $v\colon D \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

a) $\operatorname{rot} \nabla f = 0$, b) $\operatorname{rot}(fv) = f \operatorname{rot} v + (\nabla f) \times v$, c) $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$.