Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 28. November 2016

Analysis III für Lehramt

7. Übungsblatt, WiSe 2016/17

Abgabe bis Montag, 05.12.2016, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 bzw. 30 im Foyer

1) Berechnen Sie den Schwerpunkt
   a) der Halbkugel $H := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0 \}$,
   b) des im Halbraum $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0 \}$ gelegenen Teils T_x des Torus aus Aufgabe 3 (a) auf Blatt 6,
   c) des im Halbraum $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 0 \}$ gelegenen Teils T_z des Torus aus Aufgabe 3 (a) auf Blatt 6.

2) Geben Sie eine Kurve $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit
$$\gamma([0,2\pi]) = K := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 = 2ax(x^2+y^2) + a^2y^2 \}$$
an und berechnen Sie deren Länge und den Inhalt der berandeten Fläche.

3) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und (f_j) eine Folge messbarer Funktionen $f_j\colon K \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:
   a) $|f_j(x)| \le 1$ für alle $x \in K$ und $j \in \mathbb{N}$,
   b) der Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$ existiert für jedes $x \in K$.

   Zeigen Sie, dass $f_j,\ f \in \mathscr{L}^1(K)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und
$$\lim_{j\to\infty} \int_K f_j(x)\, d\lambda^n(x) = \int_K f(x)\, d\lambda^n(x)\,.$$
   Kann man die Voraussetzung (a) weglassen?

   Kann man die Voraussetzung der Kompaktheit von K abschwächen?

4) Berechnen Sie jeweils die Kurvenintegrale $\int_\Gamma \langle v(x,y), d(x,y)\rangle$:
   a) $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $v(x,y) := (x^2+xy^2, y^3+x^2y)^\top$ und $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit
$$\gamma(t) := \begin{cases} \left(1-\frac{2t}{\pi}, 0\right)^\top & \text{für } 0 \le t \le \pi\,, \\ (\cos t, \sin t)^\top & \text{für } \pi < t \le 2\pi \end{cases}$$
   b) $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $v(x,y) := (y,-x)^\top$ und $\gamma\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := e^{-t}(\cos t, \sin t)^\top$