Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 21. November 2016

Analysis III für Lehramt

6. Übungsblatt, WiSe 2016/17

Abgabe bis Montag, 28.11.2016, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 bzw. 30 im Foyer

1) Gegeben sei die Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ im ersten Quadranten, die von den Kurven $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ und $y = 4x$ berandet wird. Skizzieren Sie die Menge A, berechnen Sie ihren Flächeninhalt und das Integral
$$\int_A x^2 y^2 \, d(x, y) \, .$$

2) Gegeben sei die Menge $A \subset \mathbb{R}^2$, die von den Kurven $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$ und $y = 2\sqrt{x}$ berandet wird. Skizzieren Sie die Menge A, berechnen Sie ihren Flächeninhalt und das Integral
$$\int_A \frac{x^2}{y^2} \, d(x, y) \, .$$

3) Berechnen Sie das Volumen

   a) des *Torus* $T \subset \mathbb{R}^3$, der durch Rotation der Kreisscheibe
   $$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 5)^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$
   um die z-Achse entsteht,

   b) des *Ellipsoids*
   $$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$
   mit a, b, $c > 0$,

   c) der Menge
   $$M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} \leq 1 \right\} \, .$$

4) Es sei $a > 0$. Die *Lemniskate* $L \subset \mathbb{R}^2$ ist die Menge aller Punkte, für die das Produkt der Abstände von den Punkten $(-a, 0)$ und $(a, 0)$ den Wert a^2 besitzt.

   a) Skizzieren Sie L und begründen Sie, dass
   $$L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \right\} \, .$$

   b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der „rechten Schlaufe“ begrenzt wird.