

## Analysis III für Lehramt

### 5. Übungsblatt, WiSe 2015/16

**Abgabe** bis Montag, 21.11.2016, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 bzw. 30 im Foyer

- 1) Es sei  $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$F(x) := \int_0^{\pi/2} \left| \sin \frac{t}{x} \right| dt.$$

Zeigen Sie, dass  $F$  stetig auf  $(0, \infty)$  ist,  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ .

- 2) Es sei  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$F(x) := \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt.$$

Zeigen Sie, dass  $F$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  ist und

$$F'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Folgern Sie hieraus

$$\left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4} - F(x)$$

und zeigen Sie schließlich

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

- 3) Für einen (waagrecht liegenden) zylindrischen Öltank (Innenmaße: Durchmesser  $2m$ , Länge  $6m$ ) soll ein Messstab skaliert werden, der die jeweils aktuelle Füllmenge in Prozent der gesamten Füllmenge anzeigt (das Volumen des Stabes kann vernachlässigt werden). In welcher Höhe muss die Markierung angebracht werden, wenn die Füllmenge des Tanks 75 %, 50 %, 25 % bzw. 10 % beträgt? Wie viel Öl befindet sich noch im Tank, wenn der Ölstand  $50\text{ cm}$  beträgt.
- 4) Gegeben sei die Menge  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, |x| \leq y \leq 1\}$ . Skizzieren Sie  $A$  und berechnen Sie die Integrale

$$\int_A x^2 y d(x, y) \quad \text{und} \quad \int_A e^{-y^2} d(x, y).$$