Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 1. Februar 2017

# Analysis III für Lehramt
## Beweis von Satz 13.3.4

*Beweis.* Für jedes $x \in I$ ist $T_x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T_x(X) := A(x)X$ eine lineare Abbildung, und es gilt

$$\|T_x(X)\|_2 \le \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}(x)|^2\right)^{1/2} \|X\|_2\,.$$

Nun sei $J$ ein kompaktes Teilintervall von $I$ mit $x_0 \in J$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von $a_{jk}$ und $b$ eine Konstante $L > 0$ mit

$$\max_{x\in J}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}(x)|^2\right)^{1/2} \le L\,.$$

Setzen wir $F(x,Y) := A(x)Y + b(x)$, so folgt für $x \in J$ und $Y_1$, $Y_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\|F(x,Y_1) - F(x,Y_2)\|_2 = \|A(x)(Y_1 - Y_2)\|_2 \le L\|Y_1 - Y_2\|_2\,.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt das Anfangswertproblem also genau eine Lösung, die auf ganz $J$ existiert. Da dies für alle kompakten Intervalle $J \subset I$ mit $x_0 \in J$ gilt, folgt aus der Eindeutigkeit, dass auf ganz $I$ genau eine Lösung existiert. $\square$