Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 1. Februar 2017

Analysis III für Lehramt
Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf

Beweis. Wir formen das Anfangswertproblem zunächst in ein Fixpunktproblem um. Dazu integrieren wir die Gleichung

$$Y'(t) = F(t, Y(t))$$

nach t und erhalten für $x \in I$

$$\int_{x_0}^{x} Y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} F(t, Y(t))\,dt\,.$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (komponentenweise angewandt) folgt

$$\int_{x_0}^{x} Y'(t)\,dt = Y(x) - Y(x_0) = Y(x) - Y_0$$

und daher

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, Y(t))\,dt\,. \tag{$*$}$$

Umgekehrt zeigt man durch Differenzieren, dass jede Lösung dieser Integralgleichung für Y eine Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems liefert.
Ist $D = \mathbb{R}^n$, so wählen wir $I_0 := I$. Andernfalls wählen wir $b > 0$ mit $\overline{U_b(Y_0)} \subset D$ und setzen $I_0 := I \cap \overline{U_\delta(x_0)}$ mit

$$\delta := b \left(\max_{(x,Y) \in I \times \overline{U_b(Y_0)}} \|F(x,Y)\|_2 \right)^{-1}.$$

Wir betrachten nun den Banachraum $C(I_0, \mathbb{R}^n)$ mit der Norm

$$\|Y\|_\infty = \max_{x \in I_0} \|Y(x)\|_2\,.$$

Zunächst sei $D = \mathbb{R}^n$. Wir betrachten dann den Operator $T\colon C(I_0, \mathbb{R}^n) \to C(I_0, \mathbb{R}^n)$ mit

$$(TY)(x) := Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, Y(t))\,dt\,.$$

Wir müssen zeigen, dass T genau einen Fixpunkt $Y \in C(I_0, \mathbb{R}^n)$ hat. Es folgt für Y, $Z \in C(I_0, \mathbb{R}^n)$ und $x \in I_0$

$$\begin{aligned}
\|(TY)(x) - (TZ)(x)\|_2 &= \left\| \int_{x_0}^{x} [F(t, Y(t)) - F(t, Z(t))]\,dt \right\|_2 \\
&\le L \left| \int_{x_0}^{x} \|Y(t) - Z(t))\|_2\,dt \right| \\
&\le |x - x_0| L \|Y - Z\|_\infty \le L|I_0| \|Y - Z\|_\infty\,,
\end{aligned}$$

also

$$\|TY - TZ\|_\infty \le L|I_0|\|Y - Z\|_\infty \,,$$

wobei $|I_0|$ die Länge des Intervalls I_0 bezeichnet. Ist $L|I_0| < 1$, so ist T eine kontrahierende Abbildung und die Behauptung folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz.
Im Fall $L|I_0| \ge 1$ verwenden wir auf $C(I_0, \mathbb{R}^n)$ die äquivalente Norm

$$\|Y\|_L = \max_{x \in I_0} \left[\|Y(x)\|_2 e^{-2L|x - x_0|} \right] .$$

Dann folgt für Y, $Z \in C(I_0, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \|(TY)(x) - (TZ)(x)\|_2 &\le L \left| \int_{x_0}^{x} (\|Y(t) - Z(t))\|_2 e^{-2L|t-x_0|}) e^{2L|t-x_0|} \, dt \right| \\ &\le L\|Y - Z\|_L \left| \int_{x_0}^{x} e^{2L|t-x_0|} \, dt \right| \le L\|Y - Z\|_L \frac{e^{2L|x-x_0|}}{2L} \end{aligned}$$

und daher

$$\|TY - TZ\|_L \le \frac{1}{2} \|Y - Z\|_L \,.$$

Nun folgt die Behauptung wieder aus dem Banachschen Fixpunktsatz.
Schließlich sei $D \ne \mathbb{R}^n$. Dann betrachten wir den Operator T auf der Menge

$$X := \{ \, Y \in C(I_0, \mathbb{R}^n) : Y(I_0) \subset \overline{U_b(Y_0)} \, \} \,.$$

Da $\overline{U_b(Y_0)}$ eine abgeschlossene Menge ist, ist auch X abgeschlossen in $C(I_0, \mathbb{R}^n)$ und daher ein vollständiger metrischer Raum. Für $Y \in X$ und $x \in I_0$ gilt

$$\|(TY)(x) - Y_0\|_2 = \left\| \int_{x_0}^{x} F(t, Y(t)) \, dt \right\|_2 \le \delta \max_{(x,Y) \in I \times \overline{U_b(Y_0)}} \|F(x, Y)\|_2 = b \,,$$

d.h. $(TY)(x) \in \overline{U_b(Y_0)}$ und daher ist $TY \in X$. Wie oben zeigt man, dass auch in diesem Fall T eine kontrahierende Abbildung ist, und die Behauptung folgt erneut aus dem Banachschen Fixpunktsatz. $\square$