Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 1. Februar 2017

Analysis III für Lehramt
Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeitsaussage. Es seien x^* und z zwei verschiedene Fixpunkte von g. Dann gilt

$$d(x^*, z) = d(g(x^*), g(z)) \leq q d(x^*, z) < d(x^*, z)\,,$$

was ein Widerspruch ist.
Nun zeigen wir die Existenz eines Fixpunktes. Dazu zeigen wir zunächst, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Wir behaupten

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0) \tag{$*$}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir beweisen $(*)$ mit vollständiger Induktion. Für $n = 0$ ist $(*)$ offenbar richtig. Nun gelte $(*)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(g(x_{n+1}), g(x_n)) \leq q d(x_{n+1}, x_n) \leq q^{n+1} d(x_1, x_0))$$

und daher gilt $(*)$ auch für $n + 1$.
Für $k \in \mathbb{N}$ folgt nun aus $(*)$ und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \cdots + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \qquad (**) \\ &\leq (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + \cdots + q^{n+1} + q^n) d(x_1, x_0) \\ &= q^n (1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1}) d(x_1, x_0) \leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1, x_0)\,. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $q < 1$ und die geometrische Reihe benutzt. Wegen $q < 1$ gilt $q^n \to 0$ $(n \to \infty)$ und daher ist (x_n) eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist, konvergiert also (x_n) gegen ein $x^* \in X$.
Da die kontrahierende Abbildung g offensichtlich stetig ist, folgt

$$g(x^*) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

und daher ist x^* ein Fixpunkt von g.
Die erste Fehlerabschätzung ergibt sich sofort durch Grenzübergang $k \to \infty$ in $(**)$, und aus $(*)$ folgt

$$\begin{aligned} d(x_n, x^*) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x^*) = d(g(x_{n-1}), g(x_n)) + d(g(x_n), g(x^*)) \\ &\leq q d(x_n, x_{n-1}) + q d(x_n, x^*)\,. \end{aligned}$$

Auflösen nach $d(x_n, x^*)$ liefert dann die zweite Fehlerabschätzung. $\square$