Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 18. Juli 2016

Analysis II für Lehramt

Lösungen zum 15. Übungsblatt, SoSe 2016

1) a) $f_x(x,y) = 2x(2-y) \overset{!}{=} 0 \iff x = 0 \vee y = 2$,

$f_y(x,y) = -x^2 - 3y^2 + 6y + 9 \overset{!}{=} 0 \iff x^2 = 9 + 6y - 3y^2$.

Setzen wir in der letzten Gleichung $y = 2$, so folgt $x^2 = 9$, also $x = \pm 3$. Setzen wir $x = 0$, so folgt $y^2 - 2y - 3 = 0$, also $y = 3$ oder $y = -1$.

Mögliche Extremstellen sind also $(0,3)$, $(0,-1)$, $(3,2)$ und $(-3,2)$

Hessematrix:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4-2y & -2x \\ -2x & 6-6y \end{pmatrix},$$

$$H(0,3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, \quad H(0,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix},$$

$$H(3,2) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}, \quad H(-3,2) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Wegen $-2 < 0$ und $\det H(0,3) = 24 > 0$ hat f in $(0,3)$ ein lokales Maximum.

Wegen $6 > 0$ und $\det H(0,-1) = 72 > 0$ hat f in $(0,-1)$ ein lokales Minimum.

Wegen $\det H(3,2) = \det H(-3,2) = -36 < 0$ hat f in $(3,2)$ und $(-3,2)$ einen Sattelpunkt.

Da $f(x,0) = 2x^2 \to \infty$ $(x \to \infty)$ und $f(x,3) = -x^2 + 27 \to -\infty$ $(x \to \infty)$ hat f keine globalen Extrema.

b) $f_x(x,y) = 2x(4 - 4x^2 - y^2)e^{-x^2-4y^2}, \quad f_y(x,y) = 2y(1 - 16x^2 - 4y^2)e^{-x^2-4y^2}$.

Offensichtlich gilt $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Ist $x \neq 0$ und $f_x(x,y) = 0$, so folgt $4x^2 + y^2 = 4$. Ist nun $y = 0$, so ist $x = \pm 1$.

Ist $y \neq 0$ und $f_y(x,y) = 0$, so folgt $16x^2 + 4y^2 = 1$. Ist nun $x = 0$, so ist $y = \pm\frac{1}{2}$.

Für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ ist das Gleichungssystem $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ offensichtlich nicht lösbar.

Mögliche Extremstellen sind also $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ und $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

Offensichtlich hat f in $(0,0)$ ein globales Minimum, denn $f(0,0) = 0$ und für $(x,y) \neq (0,0)$ ist $f(x,y) > 0$.

Hessematrix:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_x x(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2(8x^4 + 2x^2y^2 - 20x^2 - y^2 + 4)e^{-x^2-4y^2} \ , \\ f_{xy}(x,y) &= 4x(16x^2 + 4y^2 - 17)e^{-x^2-4y^2} \ , \\ f_{yy}(x,y) &= 2(32y^4 + 128x^2y^2 - 16x^2 - 20y^2 + 1)e^{-x^2-4y^2} \ . \end{aligned}$$

Wegen $e^{-x^2-4y^2} > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genügt es, die Matrix

$$G(x,y) = \begin{pmatrix} 2(8x^4 + 2x^2y^2 - 20x^2 - y^2 + 4) & 4x(16x^2 + 4y^2 - 17) \\ 4x(16x^2 + 4y^2 - 17) & 2(32y^4 + 128x^2y^2 - 16x^2 - 20y^2 + 1) \end{pmatrix}$$

auf Definitheit zu überprüfen.

Es ist

$$G(1,0) = \begin{pmatrix} -16 & -4 \\ -4 & -30 \end{pmatrix} , \quad G(-1,0) = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -30 \end{pmatrix} .$$

Wegen $-16 < 0$ und $\det G(1,0) = \det G(-1,0) = 16 \cdot 29 > 0$ hat f in $(1,0)$ und $(-1,0)$ jeweils ein lokales Maximum.

Es ist

$$G\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = G\left(0, -\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} .$$

Wegen $\det G\left(0, \frac{1}{2}\right) = \det G\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -30 < 0$ hat f in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ und $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ kein lokales Extremum.

Da $0 \leq f(x,y) \leq 4(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} = 4\|(x,y)\|_2 e^{-\|(x,y)\|_2} \to 0$ $(\|(x,y)\|_2 \to \infty)$, hat f ein globales Maximum. Nach den obigen Überlegungen wird dieses in $(0,1)$ und $(0,-1)$ angenommen mit $f(0,1) = f(0,-1) = e^{-4}$.

c) $f_x(x,y) = -10(x+2) \stackrel{!}{=} 0 \iff x = -2, \quad f_y(x,y) = 4(y-3) \stackrel{!}{=} 0 \iff y = 3.$

Mögliche Extremstelle $(-2,3)$

Hessematrix:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = H(-2,3)$$

Wegen $\det H(x,y) = -40 < 0$ hat f keine lokalen und damit auch keine globalen Extrema. Da $f(-2,y) = 2(y-3)^2 \to \infty$ $y \to \infty$ und $f(x,3) = -5(x-2)^2 \to -\infty$ $x \to \infty$ ist f nach oben und unten unbeschränkt.

d) $f_x(x,y) = 6x^2 - 6e^y, \quad f_y(x,y) = 6e^{2y} - 6xe^y.$

Es gilt $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0 \iff x^2 = e^y \wedge x = e^y \iff x = 1 \wedge y = 0.$

Mögliche Extremstelle $(1,0)$.

Hessematrix:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6e^y \\ -6e^y & 12e^{2y} - 6xe^y \end{pmatrix}, \quad H(1,0) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Wegen $12 > 0$ und $\det H(1,0) = 36 > 0$ hat f in $(1,0)$ ein lokales Minimum. Da $f(x,0) = 2x^3 - 6x + 3 \to \pm\infty$ $(x \to \pm\infty)$ hat f keine globalen Extrema.

2) Wegen $f(x) \geq \|x - a_1\|_2^2 \geq (\|x\|_2 - \|a_1\|_2)^2 \to \infty$ $(\|x\|_2 \to \infty)$ hat f kein globales Maximum. Da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und f stetig auf $\mathbb{R}^2$, muss f ein lokales Minimum haben. Dies sieht man durch Anwendung des Satzes vom Minimum und Maximum auf eine hinreichend große kompakte Kugel $\overline{U}_r(0)$ um 0.

Wir schreiben nun $a_k = (a_{k1}, \dots a_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ für $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_{kj})^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

und wir erhalten für die partiellen Ableitungen für $\ell \in \{1, \dots, n\}$

$$f_{x_\ell}(x) = 2 \sum_{k=1}^{p} (x_\ell - a_{k\ell}).$$

Nun ist das Gleichungssystem $f_{x_\ell}(x) = 0$, $\ell = 1, \dots, n$ äquivalent zu

$$\sum_{k=1}^{p} (x_\ell - a_{k\ell}) = 0 \iff px_\ell = \sum_{k=1}^{p} a_{k\ell} \iff x_\ell = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} a_{k\ell}, \quad \ell = 1, \dots, n.$$

Vektoriell geschrieben lautet diese Gleichung

$$x = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} a_k.$$

Da dies die einzige stationäre Stelle von f ist, nimmt f an dieser Stelle das lokale Minimum an. Die Betrachtung der Hessematrix ist gar nicht mehr notwendig.

Man kann dieses Ergebnis auch physikalisch interpretieren. Denkt man sich $a_1, \dots, a_p$ als Massenpunkte, die alle die gleiche Masse tragen, so ist das obige x gerade der Schwerpunkt dieses Gebildes.

3) a) Aufgrund der Voraussetzungen muss f in a ein striktes lokales Minimum haben. Also gibt es b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $b_1 < a < b_2$ und $f(b_1) = f(b_2) > f(a)$. Hätte f in a kein globales Minimum, so gäbe es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(c) < f(a)$. Dabei können wir annehmen, dass $c > b_2$, denn den Fall $c < b_1$ behandelt man analog. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $d \in (b_2, c)$ mit $f(d) = f(a)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es dann ein $\xi \in (a, d)$ mit $f'(\xi) = 0$ und dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass a die einzige Nullstelle von f' ist.

b) Die Aussage in (a) gilt für Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $n > 1$ im Allgemeinen nicht mehr. Hierzu betrachtet man Beispiel (d) aus aus Aufgabe 1.

4) Es ist $f(x,y) = y^2 - (2x+1)(x-1)^2 = y^2 - 2x^3 + 3x^2 - 1$.

a) $f_x(x,y) = 6x - 6x^2 \overset{!}{=} 0 \iff x = 0 \vee x = 1, \quad f_y(x,y) = 2y \overset{!}{=} 0 \iff y = 0.$
Mögliche Extremstellen: $(0,0)$ und $(1,0)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6-12x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H(1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wegen $6 > 0$ und $\det H(0,0) = 12 > 0$ hat f in $(0,0)$ ein lokales Minimum. Wegen $\det H(1,0) = -12 < 0$ hat f in $(1,0)$ kein lokales Extremum.

Da $f(0,x) = -(2x+1)(x-1)^2 \to -\infty$ $(x \to \infty)$ ist f nach unten unbeschränkt und da $f(1,y) = y^2 \to \infty$ $(y \to \infty)$ ist f auch nach oben unbeschränkt.

b) Wir nehmen an, dass es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den drei Eigenschaften aus Teil (a) gibt. Die Stelle an der f das lokale Minimum hat nennen wir a. Nun kann man ganz ähnlich wie in Aufgabe 3 (a) argumentieren. Da f in a ein striktes lokales Minimum hat, gibt es b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$ mit $b_1 < a < b_2$ und $f(b_1) = f(b_2) > f(a)$. Da f nach unten unbeschränkt ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(c) < f(a)$. Dabei können wir annehmen, dass $c > b_2$, denn den Fall $c < b_1$ behandelt man analog. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $d \in (b_2, c)$ mit $f(d) = f(a)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es dann ein $\xi \in (a,d)$ mit $f'(\xi) = 0$ und an dieser Stelle muss f ein lokales Maximum haben, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.