Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 18. Juli 2016

Analysis II für Lehramt

15. Übungsblatt, SoSe 2016

Keine Abgabe, keine Korrektur

1) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema folgender Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   a) $f(x,y) := x^2(2-y) - y^3 + 3y^2 + 9y$,

   b) $f(x,y) := (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}$,

   c) $f(x,y) := 2(y-3)^2 - 5(x+2)^2$,

   d) $f(x,y) := 2x^3 + 3e^{2y} - 6xe^y$.

2) Es seien $p \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$ paarweise verschieden. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \sum_{k=1}^{p} \|x - a_k\|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

   Hinweis: Wenn Ihnen die Lösung der Aufgabe Schwierigkeiten bereiten sollte, betrachten Sie zunächst den Spezialfall $n = 2$.

3) a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung f' genau eine Nullstelle $a \in \mathbb{R}$ hat. Zeigen Sie: Hat f in a ein lokales Minimum, so hat f in a sogar ein globales Minimum.

   b) Gilt die Aussage in (a) auch für Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $n > 1$?

   Hinweis: Betrachten Sie die Beispiele aus Aufgabe 1.

4) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := y^2 - (2x+1)(x-1)^2$.

   a) Zeigen Sie: f hat genau ein striktes lokales Minimum, kein lokales Maximum und ist nach unten unbeschränkt.

   b) Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den drei Eigenschaften aus Teil (a)?