Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 4. Juli 2016

Analysis II für Lehramt

13. Übungsblatt, SoSe 2016

Abgabe bis Montag, 11.07.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $A,\ B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ definieren wir

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{\, d(x, y) : x \in A\,,\ y \in B \,\}\,.$$

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Sind A und B abgeschlossen in X, so ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

b) Ist A kompakt und B abgeschlossen in X, so ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

2) Es sei $C[0, 1]$ der normierte Raum aller stetigen Funktionen $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit der Maximumnorm und $T\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$ definiert durch

$$(Tf)(x) := \int_0^x f(t)\, dt\,, \quad x \in [0, 1]\,.$$

a) Zeigen Sie, dass T eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie die Bildmenge von T. Ist T surjektiv?

c) Bestimmen Sie den Kern von T. Ist T injektiv?

d) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von T sowie die zugehörigen Eigenräume.

e) Ist T stetig auf $C[0, 1]$?

3) Untersuchen Sie folgende Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

a) $f(x, y) := \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0)\,, \end{cases}$

b) $f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0)\,, \end{cases}$

c) $f(x, y) := \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{x^4+y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0)\,, \end{cases}$

d) $f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & \text{für } y \neq 0\,, \\ x & \text{für } y = 0\,, \end{cases}$

4) Es sei $A := \left\{\, \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \,\right\}$. Ist die Menge A offen bzw. abgeschlossen? Bestimmen Sie $\overline{A}$, A°, A' und ∂A.