Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Christopher Classen

Dortmund, 27. Juni 2016

Analysis II für Lehramt

12. Übungsblatt, SoSe 2016

Abgabe bis Montag, 04.07.2016, 12:00 Uhr in den Briefkästen im Foyer

1) Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, (Y, ρ) ein metrischer Raum, $f\colon X \to Y$ eine injektive Abbildung und $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x,y) := \rho(f(x), f(y))$. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X ist.

2) Es sei $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x,y) := |\arctan x - \arctan y|$. Zeigen Sie:

   a) Es ist d eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

   b) Es ist $U \subset \mathbb{R}$ offen bzgl. der üblichen Metrik (Betragsmetrik) genau dann, wenn U offen bzgl. der Metrik d ist.

   c) Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig.

3) Skizzieren Sie folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, untersuchen Sie welche der Mengen offen oder abgeschlossen sind und bestimmen Sie jeweils das Innere, den Abschluss und den Rand der Menge:

   a) $A := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 3 \}$

   b) $B := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq y \}$

   c) $C := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\,,\ y > 0\,,\ xy < 1 \}$

   d) $D := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = x^2 \}$

4) Es seien (X,d) ein metrischer Raum und A, $B \subset X$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   a) $(\overline{A})^\circ \subset \overline{(A^\circ)}$

   b) $\overline{(A^\circ)} \subset (\overline{A})^\circ$

   c) $\overline{(A^\circ)} = \overline{A}$

   d) $(A \cup B)^\circ \subset A^\circ \cup B^\circ$

   e) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$

   f) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$